

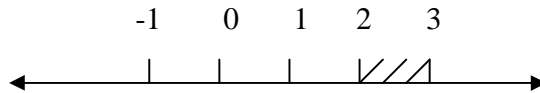
Módulo 1

Algunos conceptos básicos

Intervalo:

Un intervalo real es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre dos números reales a y b . Se notará $[a,b]$ intervalo cerrado, para indicar que los números a y b pertenecen al conjunto y se notará (a,b) intervalo abierto, para indicar que los números a y b no pertenecen al conjunto.

Ejemplo: $(2, 3)$



Valor Absoluto de un número real:

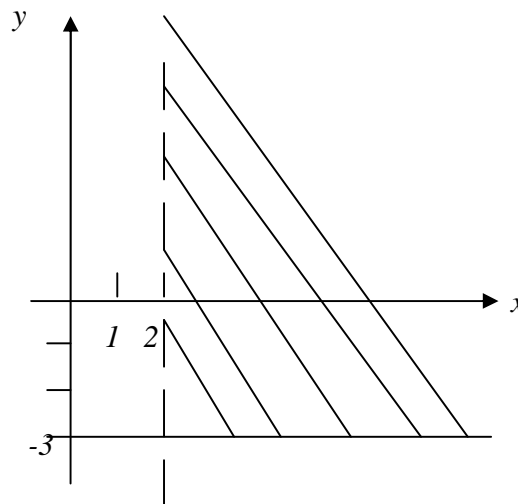
Sea x un número real, el valor absoluto de x , se nota $|x|$ y se define como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Regiones del plano:

Una región del plano es el conjunto de todos los puntos o pares ordenados (x,y) tales que x e y satisfacen condiciones dadas.

Ejemplo: $\{ (x,y) / x > 2, y \geq -3 \}$



Actividades:

1) Escribir los siguientes conjuntos de números en términos de intervalos:

- a) $\{x / -5 < x \leq 7\}$ b) $\{x / 2 \leq x \leq 4\}$ c) $\{x / 2 \leq x\}$
d) $\{x / x^2 \geq 0\}$ e) $\{x / x^2 \geq 2\}$

2) Resolver y representar el conjunto solución:

- a) $|x| = 4$ b) $|x + 1| = 2$ c) $|5 - 2x| = 10$ d) $|x| > 3$
e) $|x - 5| \leq 4$ f) $|4x| = |4x + 1|$ g) $|2x + 3| < 1$
h) $|3x - 5| \leq 2$ i) $|9 - 6x| \leq 8$ j) $|x - 3| \geq 5$

3) Graficar las siguientes regiones del plano:

- a) $\{(x,y) / x > 0, y \leq 2\}$ b) $\{(x,y) / |x| \leq 4, |y| \geq 1\}$
c) $\{(x,y) / |x + 1| \leq 3, |y - 2| \geq 1\}$

Observación: En el Apéndice al final de este capítulo se encuentran las definiciones, nociones básicas y propiedades de funciones vistas en Matemática I.

Funciones pares e impares:

Sea $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$

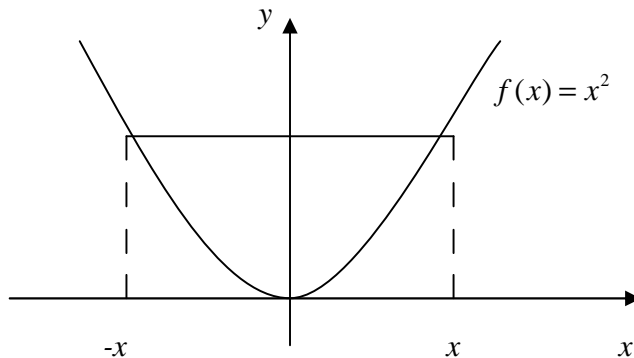
- Decimos que f es una **función par** si $\forall x \in [-a, a], f(-x) = f(x)$

Notemos que tanto x como $-x$ deben estar en el dominio de f .

Por ejemplo la función $f(x) = x^2$ es par, ya que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje y.

Como $f(x) = f(-x)$, el punto (x,y) está en la gráfica si y sólo si el punto $(-x,y)$ también está. Una vez que conocemos la gráfica de un lado del eje y , automáticamente la conocemos del otro lado.



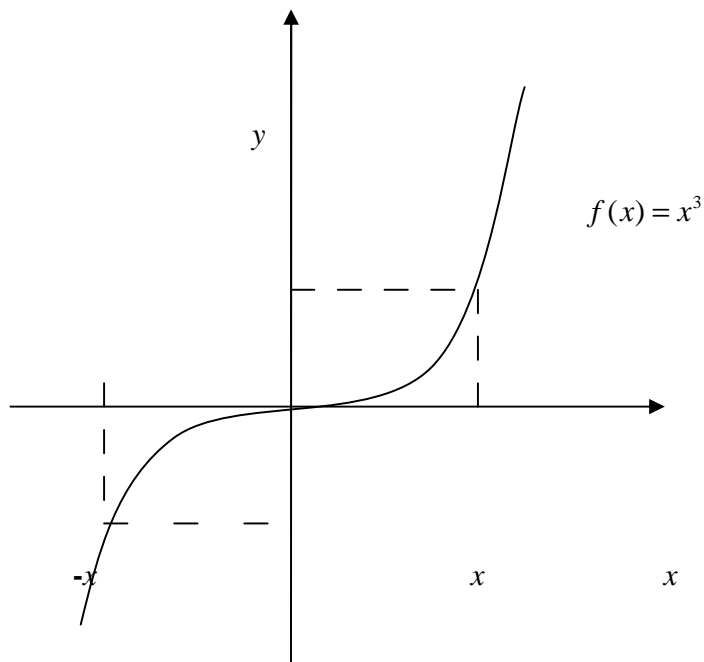
- Decimos que f es una **función impar** si $\forall x \in [-a, a], f(-x) = -f(x)$

Notemos nuevamente que tanto x como $-x$ deben estar en el dominio de f .

Por ejemplo la función $f(x) = x^3$ es impar, ya que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

La gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen.

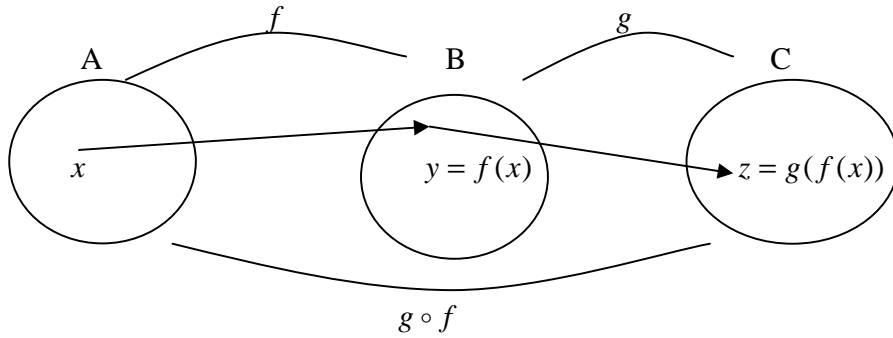
Como $-f(x) = f(-x)$, el punto (x,y) está en la gráfica si y sólo si el punto $(-x,-y)$ también está. Una vez que conocemos la gráfica de un lado del eje y , automáticamente la conocemos del otro lado.



Operaciones algebraicas entre funciones numéricas:

Sean $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ definimos

- Suma de funciones:
 $f + g : D \rightarrow \mathbb{R} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \forall x, x \in D$
- Producto de funciones:
 $f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \forall x, x \in D$
- Cociente de funciones:
 $f / g : D^* \rightarrow \mathbb{R} \quad (f / g)(x) = f(x) / g(x) \forall x, x \in D^*$
 $D^* = \{x, x \in D, g(x) \neq 0\}$
- Composición de funciones:
 Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ definimos la función composición:
 $g \circ f : A \rightarrow C \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x, x \in A$
 se lee “ f compuesta con g ”.



Actividades:

4) Determinar cuáles de las siguientes funciones son pares o impares:

- a) $f(x) = x + x^3 + 4x^5$
- b) $g(x) = 2 + x^2 + 4x^4$
- c) $h(x) = x + x^3 + 4x^5$
- d) $t(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$
- e) $u(x) = \frac{x + x^3}{1 + x^2}$
- f) $w(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$

5) Sea $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, demostrar que la función $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ es una función par y que la función $h(x) = f(x) - g(x)$ es una función impar.

6) Demostrar que toda función numérica puede escribirse como suma de una función par más otra impar.

7) Sean $h = f + g$; $t = f \cdot g$; $r = g / f$. Sabiendo que $f(2) = 3$ y $g(2) = -2$, hallar:

- a) $h(2)$
- b) $t(2)$
- c) $r(2)$
- d) $(t - h \cdot r)(2)$

8) Realice las gráficas de las funciones $f(x) = 2x - 1$ y $f(x) = x^2$. A partir de tales gráfica encuentre la de $h = f + g$

9) Dadas $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = x^2$, ambas con dominio y codominio real, hallar:

- a) $f(2+h)$
- b) $g(5+h)$
- c) $g(f(0))$
- d) $g(f(-1))$
- e) $g(f(u))$
- f) $g(f(1+h))$
- g) $f(g(0))$
- h) $f(g(-1))$
- i) $f(g(u))$

¿La composición de funciones es conmutativa?

10) En los siguientes casos determine las funciones compuestas $g \circ f$ y $f \circ g$. Describa sus dominios:

- a) $f(x) = 2x - 1$ $g(x) = \sqrt{x+1}$;
- b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ $g(x) = 2x + 1$
- c) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ $g(x) = x^2 - 2$

11) Dadas $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 1$ y $h(x) = \frac{1}{x}$, hallar:

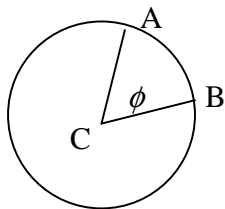
- a) $g \circ f$
- b) $g \circ g$
- c) $f \circ h$
- d) $f \circ g \circ h$
- e) $g \circ f \circ g$
- f) $g \circ f \circ h$

Funciones Elementales

	Clasificación	Ejemplo
Algebraicas: son aquellas que pueden construirse mediante un número finito de operaciones algebraicas (sumas, productos, cocientes y raíces)	<p>Polinomiales: tienen la forma</p> $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0, a_n \in \mathfrak{R}$ <p>Los a_i se denominan coeficientes.</p> <p>En particular cuando $n=1$ se denomina función lineal.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Corta al eje x a lo sumo n veces • Cuando el valor de x crece el término $a_n x^n$ domina el comportamiento de la función 	<p>$f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 1$</p> <p>Lineal: $f(x) = 2x - 1$</p>
	<p>Racionales: son cociente de dos funciones polinomiales. Tienen la forma:</p> $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, p(x) \text{ y } q(x) \text{ polinomiales y } \text{Dom}(f) = \{x, x \in \mathfrak{R} \wedge q(x) \neq 0\}$ <p>En particular cuando $p(x)$ y $q(x)$ son lineales, se denomina función homográfica:</p> $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \text{Dom}(f) = \{x, x \in \mathfrak{R} \wedge cx + d \neq 0\}$	<p>$f(x) = \frac{3x^5 + 2}{2x^3 - x}$</p> <p>Homográfica:</p> $f(x) = \frac{3x + 2}{2x - 1}$
	<p>Irracionales: además de las operaciones que incluyen las racionales, incluyen raíces (o exponentes fraccionarios) de la variable independiente.</p>	<p>$f(x) = \sqrt{3x^2 + 2} - x$</p>
Trascendentes	<p>Trigonométricas: se definen las funciones seno y coseno como</p> <p>$sen: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / senx =$ valor del seno de un ángulo medido en radianes</p> <p>$cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / cosx =$ valor del coseno de un ángulo medido en radianes</p> <ul style="list-style-type: none"> • Las funciones $senx$ y $cosx$ son periódicas de período 2π (una función periódica, de período T, es tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo x). • Se definen también las funciones $tanx = \frac{senx}{cosx}$; $cotx = \frac{cosx}{senx}$; $secx = \frac{1}{cosx}$; $cosecx = \frac{1}{senx}$ 	<p>$f(x) = senx$</p>
	<p>Exponenciales: son funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde a se llama base y x es el exponente, $a \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$</p> <p>Propiedades: $a^1 = a$; $a^0 = 1$; $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$; $(ab)^p = a^p b^p$; $a^{pq} = (a^p)^q$</p>	<p>$f(x) = 2^x$.</p>
	<p>Logarítmicas: las funciones exponenciales con codominio real positivo son funciones biyectivas y por lo tanto invertibles, se define entonces:</p> <p>$\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$, con $\log_a^{-1}(x) = a^x$ y $(a^x)^{-1} = \log_a x$</p> <p>Propiedades: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; $\log_a(1/x) = -\log_a x$; $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$; $\log_a(x^p) = p \log_a x$</p>	<p>$f(x) = \log_2 x$</p>

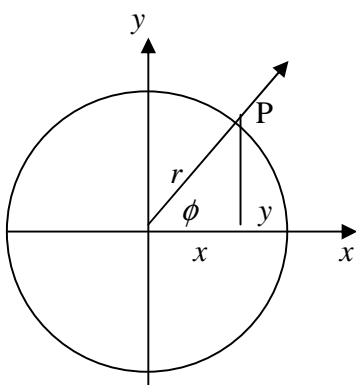
Observación 1:

Con respecto a las funciones trigonométricas hemos señalado que los ángulos se medirán en radianes:



La medida en radianes ϕ del ángulo ABC se define como la longitud del arco AB. Dado que la circunferencia de un círculo mide 2π y una revolución completa de un círculo es 360° la relación entre radianes y grados está dada por: π radianes = 180°

Definimos las funciones trigonométricas en términos de las coordenadas del punto P(x,y), donde el lado terminal interseca al círculo:



$\text{sen}\phi = \frac{y}{r}$	$\text{cos}\phi = \frac{x}{r}$	$\text{tg}\phi = \frac{y}{x}$
--------------------------------	--------------------------------	-------------------------------

Observación 2:

Con respecto a las funciones exponenciales y logarítmicas, analizaremos en este curso el caso en que a es el número e .

En consecuencia, $\log_e y = x \Leftrightarrow e^x = y$, se nota $\log_e y = \ln y$

$$\Rightarrow \ln e^x = x \quad \text{y} \quad e^{\ln x} = x$$

El número e surge como una aproximación de la función $(1 + \frac{1}{x})^x$ para valores arbitrariamente grandes de x .

La función $\ln x$ se define como el área bajo la curva de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ entre valores de x mayores que 1. Y como el valor opuesto al del área entre el eje x y la curva $\frac{1}{x}$ entre valores de x mayores que 0 y menores que 1

Observación 3: Forma estandar de una función racional:

Un procedimiento útil que puede aplicarse a una función racional es el siguiente:

Dada $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, si hacemos la división de polinomios (obtenemos un cociente y un resto), y entonces podemos escribir :

$$p(x) = q(x)d(x) + r(x), \text{ siendo } d(x) \text{ el cociente y } r(x) \text{ el resto}$$

$$\text{Y por lo tanto } f(x) = \frac{q(x)d(x) + r(x)}{q(x)} = d(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Notemos que si el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$ el cociente sería cero y el resto sería el mismo $p(x)$, por lo tanto no modificaríamos el aspecto de nuestra función.

Se dice entonces que $f(x)$ fue llevada a su forma estandar, la función racional queda ahora expresada como suma de una polinomial y una racional. Esto tiene grandes ventajas para graficar la función.

Ejemplo: $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$

Si realizamos la división del numerador por el denominador obtenemos:

$$2x - 1 = (x - 1)2 + 1, \quad \text{por lo tanto} \quad f(x) = \frac{2(x-1) + 1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$$

Es fácil observar entonces que la gráfica es una traslación (1 unidad hacia la izquierda y dos unidades hacia arriba) de la gráfica de la función $g(x) = \frac{1}{x}$

Actividades:

12) Sea $f(x)$ una función lineal. Hallar la función sabiendo que $f(-1) = 2$ y $f(2) = -3$. Representar gráficamente.

13) Hallar una función f cuadrática tal que $f(0) = 1, f(1) = 0$ y $f(3) = 5$. Representar gráficamente.

14) Graficar la función $f(x) = \frac{1}{x}$. Analizar la paridad.

15) Graficar las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{3x+7}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$

16) Muestre que las funciones $f(x)=\text{sen}x$ y $g(x)=\text{cos}x$ son funciones periódicas, de período 2π .

17) Indicar cuáles de las siguientes funciones son periódicas, en caso de serlo determinar su período.

a) $f(x)=10\text{sen}3x$

b) $g(x)=4\text{sen}^2 x$

c) $h(x)=\text{cos}(3x-2)$

18) Las funciones $\text{sen}x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\text{cos}x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no son biyectivas. ¿Cómo puede restringirse su dominio y codominio para que lo sean?

19) Usando las propiedades de la función exponencial, demuestre que $a^x \geq 0 \quad \forall x, x \in \mathbb{R}$

20) Usando el hecho de que $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$, con $\log_a^{-1}(x) = a^x$ y $(a^x)^{-1} = \log_a x$ o lo que es lo mismo que $a^{\log_a x} = x$ y $\log_a a^x = x$, demuestre al menos dos de las propiedades de las funciones logarítmicas.

Apéndice

Esta sección contiene para repaso temas esenciales para esta materia que se han visto en Matemática I (Definición de función, dominio, codominio, imagen, gráfica, inyectividad, suryectividad, biyectividad, función inversa), también las nociones de simetrías y traslaciones.

Funciones

Muchos fenómenos de la vida diaria se representan como funciones, por ejemplo cuando queremos hallar el área de un cuadrado escribimos $A=l^2$ donde l representa la longitud del lado, esto no es otra cosa que decir que el área de un cuadrado depende de la longitud de su lado y en términos de funciones esto se expresa como $f(x)=x^2$

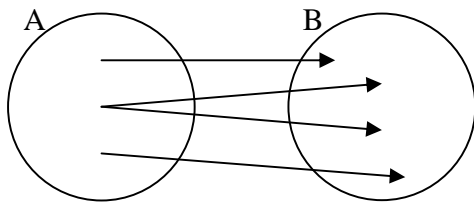
Por ejemplo la música que escuchamos en una radio es transmitida a ella en forma de ondas electromagnéticas, cada una de estas ondas es periódica (la forma básica de la onda se repite una y otra vez), la descripción matemática de tales fenómenos involucra funciones periódicas, de las cuales las más conocidas son las funciones trigonométricas.

Otro tipo de fenómenos es, por ejemplo, la reproducción ciertas de bacterias que se van duplicando en una unidad de tiempo. Si tuviéramos una población de 100 bacterias que se van duplicando en una hora, tendríamos, asignando a cada hora el número de bacterias existentes, $p(0)=100$, $p(1)=200$, $p(2)=400$, $p(3)=800$, ... $p(n)=100 \cdot 2^n$. A este tipo de funciones se las llama función exponencial.

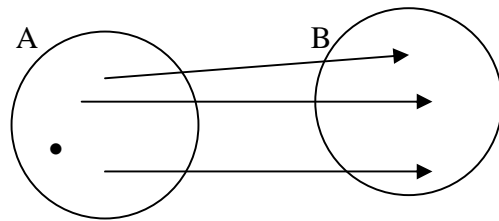
Una función $f : A \rightarrow B$ es una **relación entre los elementos de un conjunto A y los elementos de un conjunto B, que hace corresponder a cada elemento de A, uno y sólo un elemento de B.**

- Se escribe $y = f(x)$, para indicar que x es un elemento de A e $y = f(x)$ es el correspondiente de x por f .
- Se dice que x es la **variable independiente** e y es la **variable dependiente**.

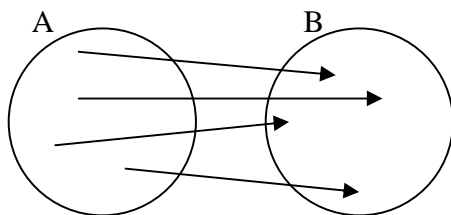
Ejemplos:



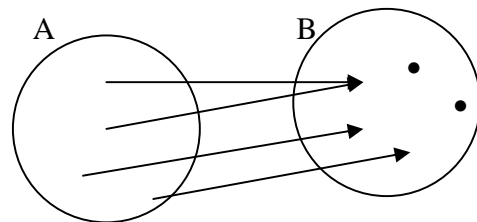
No es función ya que a un mismo elemento De A le corresponden 2 elementos de B



No es función ya que hay elementos en A que no tienen correspondencia en B



Es función ya que todo elemento de A tiene su Correspondiente en B y éste es único.



Es función al igual que el ejemplo anterior

Funciones numéricas:

Una función numérica es una función entre elementos de conjuntos numéricos.

Son ejemplos de funciones numéricas:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por } f(x) = 3x + 2$$

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \text{ dada por } f(x) = x - 25$$

1. **Dominio:** El dominio de una función numérica es el conjunto de números para los cuales se define un correspondiente.

El mismo puede darse en forma explícita, por ejemplo, si escribimos $f : A \rightarrow B$, entonces A es el dominio de la función. Pero también puede darse en forma implícita, por ejemplo, si sólo escribimos

$f(x) = \frac{3+x}{x-5}$, se entiende que el dominio es el conjunto de todos los números para los cuales puede

calcularse el correspondiente por f , en este ejemplo, diremos entonces que el dominio es $\mathbb{R} - \{5\}$ (todos los números reales salvo aquellos para los cuales el denominador es 0).

2. **Codominio:** El codominio de una función $f : A \rightarrow B$, es el conjunto B

3. **Imagen:** La imagen de una función $f : A \rightarrow B$, son los elementos del codominio que son correspondientes de algún elemento de A.

En términos de conjuntos $\text{Im}(f) = \{y, y \in B / \exists x, x \in A, y = f(x)\}$.

Ejemplo:

Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por : $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $A = \{x, x \in \mathbb{R}, x \geq 1\}$, entonces

El dominio de f está explicitado como el conjunto de los números reales mayores o iguales que 1, el codominio de f es el conjunto de los números reales y la imagen serán los números reales positivos, es decir $\text{Im}(f) = \{y, y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$

Igualdad de funciones:

Dos funciones son iguales si y sólo si tienen el mismo dominio y establecen la misma relación:

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = D \\ f(x) = g(x) \forall x, x \in D \end{cases}$$

Actividades:

1) Dada $f(x) = \frac{3+x}{x-5}$ determinar: a) $f(-1)$; b) $f(0)$; c) $f(2)$; d) $f(3/2)$

2) Dada $g(t) = \sqrt{1+t^2}$ determinar: a) $g(0)$; b) $g(-\frac{3}{4})$; c) $g(3)$

3) Determinar el dominio e imagen de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $g(x) = \frac{1}{3+x} - 2$ c) $h(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 4}$

d) $t(x) = \frac{x-2}{x^2 - 4x + 4}$ e) $u(x) = \sqrt{x-7}$ f) $w(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$

4) Un rectángulo tiene 100cm de perímetro . Expresar el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados.

5) Se desea construir un depósito de base cuadrada (sin tapa) y 10 m^3 de capacidad. Expresar la superficie lateral del depósito en función de la longitud del lado de la base.

6) En un triángulo isósceles cuya base es 10 cm y su altura es 6 cm , está inscripto un resctángulo cuya base mide b cm y está sobre la base del triángulo. Expresar el área del rectángulo en función de la medida de su base.

7) Una lámina metálica rectangular mide 5 cm de ancho y 8 m de largo. Se van a cortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas para doblar la pieza metálica resultante y soldarla para formar una caja sin tapa. Expresar el volumen de la caja en función de su altura.

8) Estudiar si las siguientes funciones son iguales. Justificar:

$$f(x) = x + 2 \qquad g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Gráfica de una función numérica:

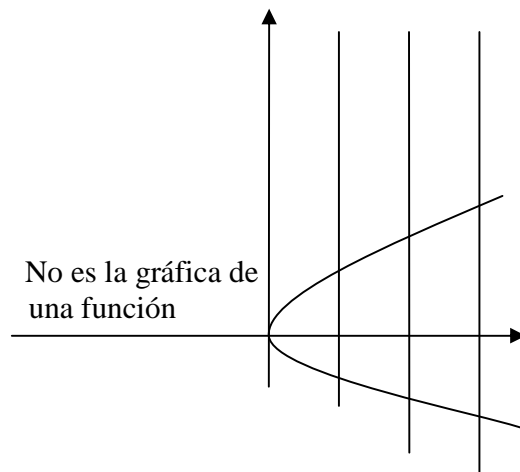
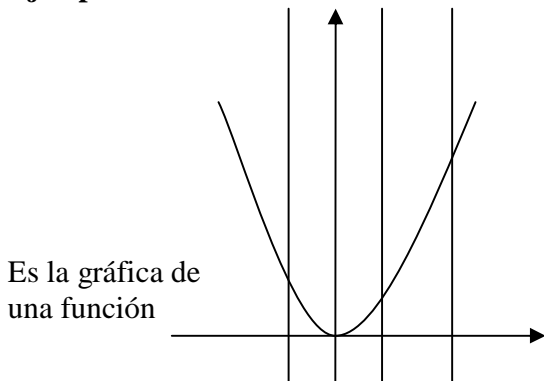
Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$

Luego, el conjunto de puntos (x, y) , siendo $y = f(x)$ es la gráfica de la función, es decir

$$Graf(f) = \{(x, y) / x \in D, y = f(x)\}$$

Con esta definición, una gráfica representa a una función si toda recta vertical que corta al eje de las abscisas en un punto de su dominio, corta a su gráfica en un solo punto.

Ejemplos:



La función inversa:

• Decimos que una función $f(x)$ es **inyectiva** si a dos elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas en el codominio. Es decir:

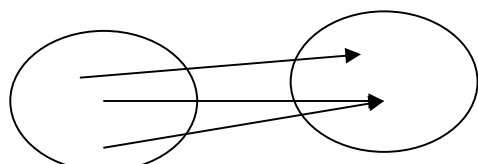
Sea $f : A \rightarrow B$ $f(x)$ es **inyectiva** si $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

O equivalentemente $f(x)$ es **inyectiva** si $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

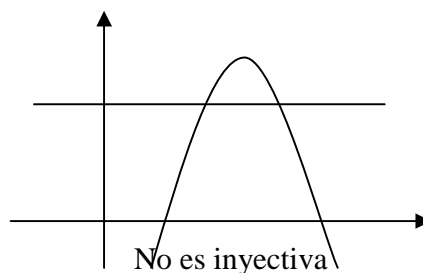
Ambas expresiones son equivalentes ya que una es la contrarrecíproca de la otra.

-Si la función admite una representación mediante diagrama de flechas, la misma será inyectiva si a cada elemento del codominio le llega a lo sumo una flecha.

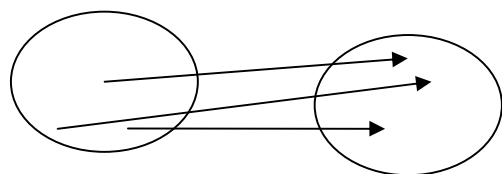
-En una representación utilizando un sistema de coordenadas cartesianas, un criterio para decidir si la función es inyectiva es el siguiente:
 toda recta horizontal que corte al eje de las ordenadas en un punto de su codominio debe cortar a su gráfica en a lo sumo un punto.



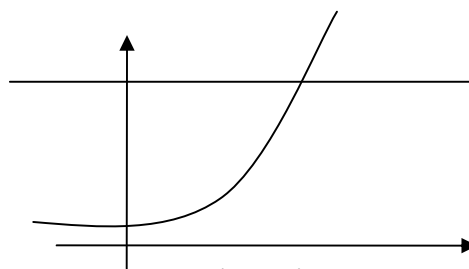
No es inyectiva



No es inyectiva



Es inyectiva



Es inyectiva

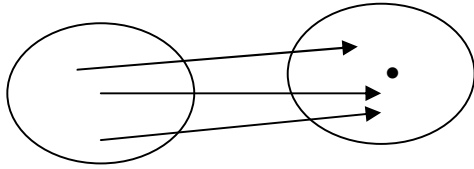
• Decimos que una función $f(x)$ es **suryectiva** si todo elemento del codominio es correspondiente de uno o más elementos del dominio. Es decir:

Sea $f : A \rightarrow B$ $f(x)$ es **suryectiva** si $\forall y \in B, \exists x \in A / y = f(x)$

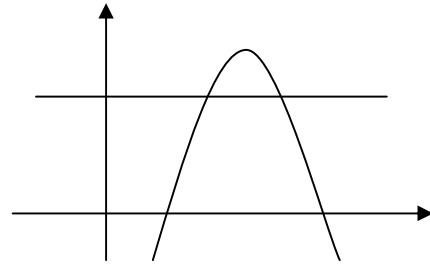
O equivalentemente $f(x)$ es **inyectiva** si $\text{Im}(f) = \text{Codominio}(f)$

-Si la función admite una representación mediante diagrama de flechas, la misma será suryectiva si a cada elemento del codominio le llega al menos una flecha.

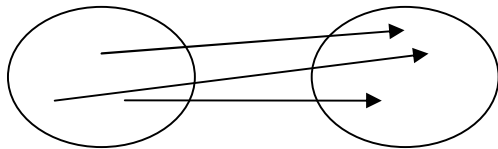
-En una representación utilizando un sistema de coordenadas cartesianas, un criterio para decidir si la función es suryectiva es el siguiente:
 toda recta horizontal que corte al eje de las ordenadas en un punto de su codominio debe cortar a su gráfica en al menos un punto.



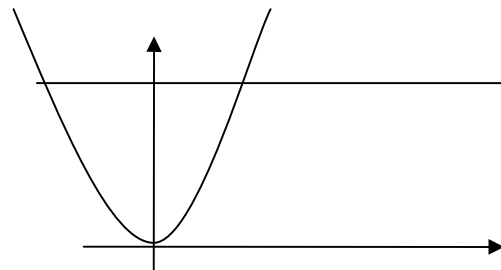
No es suryectiva



Si consideramos $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, no es suryectiva



Es suryectiva



Si consideramos $f : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ es suryectiva

• Decimos que una función $f(x)$ es **biyectiva** si es inyectiva y suryectiva. Es decir que todo elemento del codominio es correspondiente de uno y sólo un elemento del dominio. Se dice también que hay una correspondencia “uno a uno”.

Sea $f : A \rightarrow B$ una función numérica. Sea C un subconjunto de A . Diremos que **f es invertible en A** si existe una función g tal que :

$$\forall x, x \in A, (g \circ f)(x) = x \quad \text{y} \quad \forall y, y \in B, (f \circ g)(y) = y$$

A la función g se la llama **función inversa de f** y se la nota f^{-1}

Una función f es invertible sí y sólo si f es biyectiva

En la práctica, si $y=f(x)$, para encontrar la función inversa despejamos la variable x en función de la variable y . Si el valor hallado está en el dominio habremos encontrado la función inversa.

Ejemplos:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x)=2x-3$

Escribimos $y = 2x - 3 \rightarrow x = \frac{y+3}{2}$ como para cualquier número real y la expresión $\frac{y+3}{2}$ es un número real, pertenece al dominio, por lo tanto $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

b) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad f(x) = 2x - 3$

Con el mismo procedimiento observamos que la expresión $\frac{y+3}{2}$ no es en general un número natural. Por ejemplo si $y = 2$, la expresión da $\frac{5}{2}$ que no es un número natural. Vemos que la expresión da números naturales sólo cuando y es un número impar, ya que el numerador queda par y por lo tanto divisible por dos. Podemos decir entonces que $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ es la inversa de la función restringiendo el codominio a los naturales impares. Notemos que allí la función resulta biyectiva.

Actividades:

9) Teniendo en cuenta la definición de función, analice porqué es condición necesaria y suficiente que una función sea biyectiva para que sea invertible.

10) Analice la biyectividad de las siguientes funciones en el dominio de definición. En caso de no ser biyectivas en ese dominio, definir uno donde sí lo sean. Encontrar la expresión de la función inversa en el dominio hallado.

a) $f(x) = 2x + 3$

b) $f(x) = x^2 - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

e) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

Simetrías:

Simetría de dos puntos:

• Se dice que dos puntos P y P' son simétricos con respecto a un tercer punto Q si y sólo si el tercer punto Q es el punto medio del segmento PP' .

• Se dice que dos puntos P y P' son simétricos con respecto a una recta L si y sólo si la recta es la mediatriz del segmento PP' .

Simetría de una gráfica respecto a un punto:

La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto a un punto Q si y sólo si, para cada punto P perteneciente a la gráfica de la ecuación existe un punto P' que también pertenece a la gráfica tal que P y P' son puntos simétricos con respecto a Q.

• En particular si el punto Q es el origen de coordenadas, la gráfica será simétrica si para cada punto (x, y) de la gráfica el punto (-x, -y) también pertenece a la gráfica.

Simetría de una gráfica respecto a una recta:

La gráfica de una ecuación es simétrica con respecto a una recta L si y sólo si, para cada punto P perteneciente a la gráfica de la ecuación existe un punto P' que también pertenece a la gráfica tal que P y P' son puntos simétricos con respecto a la recta L.

• En particular si la recta es el eje x la gráfica será simétrica si para cada punto (x,y) de la gráfica, el punto (x, -y) también pertenece a la gráfica.

• Si la recta es el eje y la gráfica será simétrica si para cada punto (x, y) de la gráfica el punto (-x, y) también pertenece a la gráfica.

Actividades:

11) Analizar si los puntos P y P' son simétricos con respecto a Q:

- a) P(2,1) P'(8,5) Q(5,3)
b) P(3,4) P'(-2, 2) Q(1,3)

12) Analizar si los puntos P y P' son simétricos con respecto a la recta $y = x - 3$

- a) P(-1,1) P'(4,-4)
b) P(3,1) P'(3,-1)

13) Decir cuáles de las siguientes ecuaciones representan gráficas simétricas respecto del eje x , del eje y, al origen de coordenadas o no lo son.

- a) $y = x^2 - 2$
b) $y^2 = x^3 - 4x$
c) $y = x^3 + x$
d) $x y^2 = -10$
e) $(x + 1)^2 - (y - 2)^2 = 1$
f) $x^2 - y^2 = 1$

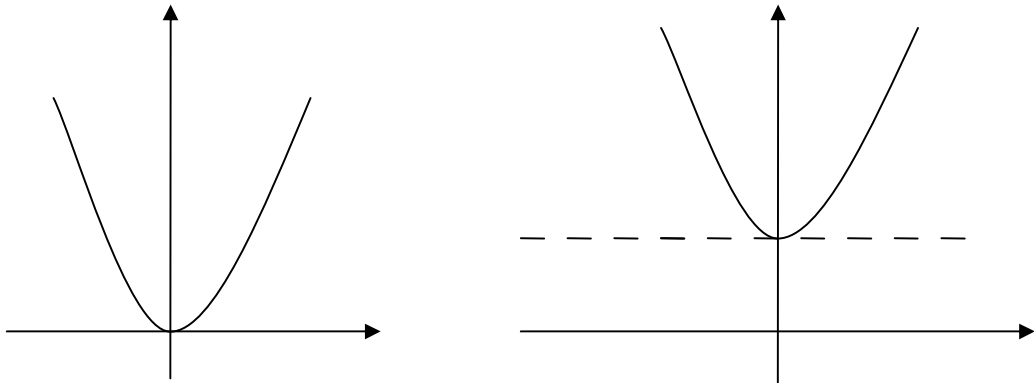
Traslaciones:

Muchas veces se presentan gráficas de distintas ecuaciones, en las que una de ellas no es más que una traslación de la otra en sentido vertical (hacia arriba o hacia abajo), o en sentido horizontal (hacia la derecha o hacia la izquierda).

Ejemplo 1:

$$y = x^2$$

$$y = x^2 + 3$$

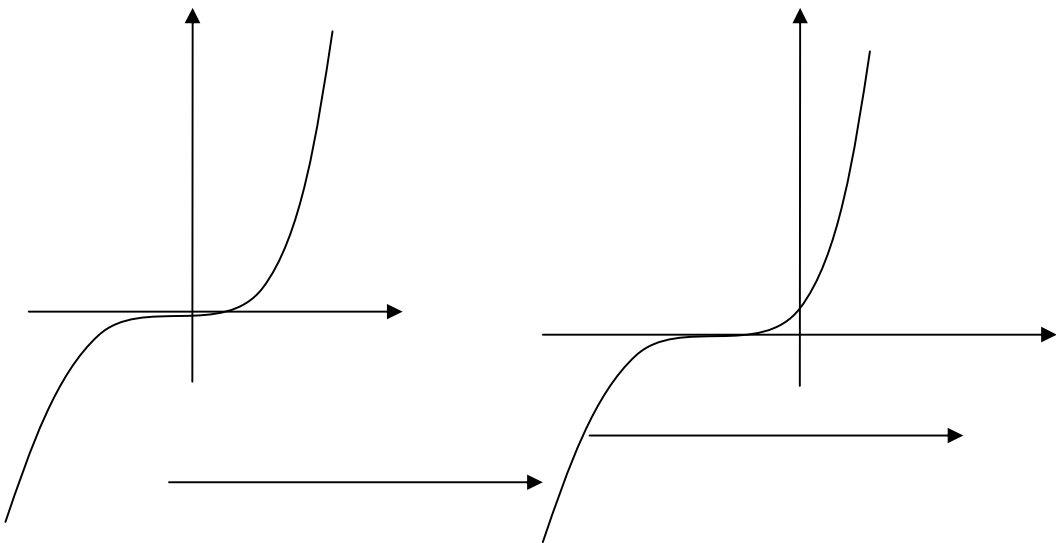


La gráfica de $y = x^2 + 3$ no es más que la gráfica de $y = x^2$ trasladada 3 unidades hacia arriba.

Si ubicáramos un nuevo sistema de ejes coordenados (x', y') con origen en el punto $(0, 3)$, la gráfica respondería a la ecuación $y' = x'^2$. Recordemos que los ejes son un sistema de referencia, por lo tanto el punto $(0, 3)$ del sistema original correspondería al $(0, 0)$ del nuevo sistema, así podríamos identificar $x' = x$ e $y' = y - 3$. De este modo el $(0, 0)$ del sistema original es el $(0, -3)$ del nuevo sistema. Así, aplicando la traslación, la ecuación $y' = x'^2$ corresponde a $y - 3 = x^2$.

Ejemplo 2: $y = x^3$

$y = (x+1)^3$

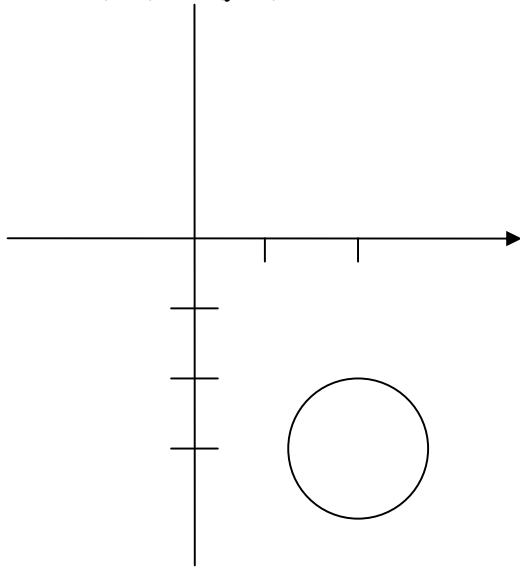


La gráfica de $y = (x+1)^3$ no es más que la gráfica de $y = x^3$ trasladada 1 unidad hacia la izquierda.

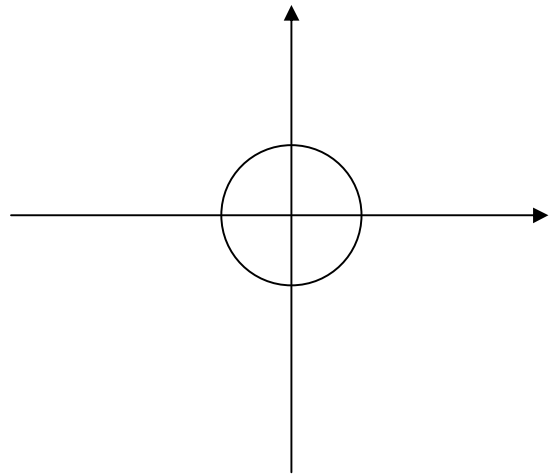
Si ubicáramos un nuevo sistema de ejes coordenados (x', y') con origen en el punto $(-1, 0)$, la gráfica respondería a la ecuación $y' = x'^3$. Podríamos identificar $x' = x+1$ e $y' = y$.

La ecuación $y' = x'^3$ corresponde a $y = (x+1)^3$.

Ejemplo 3: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$



$x^2 + y^2 = 1$



Nuevamente $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$ es una traslación dos unidades hacia la derecha y 3 hacia debajo de $x^2 + y^2 = 1$. Por lo tanto podemos plantear un nuevo sistema (x', y') con $x' = x-2$ e $y' = y+3$ de este modo se identifican las graficas $x'^2 + y'^2 = 1$ con $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$.

Actividades:

14) A partir de la gráfica de $y = |x|$ y una traslación conveniente obtenga la gráfica de :

- a) $y = |x - 4|$
- b) $y = |x| + 2$
- c) $y = |x - 4| + 2$

15) A partir de la gráfica de $y = 1/x$ y una traslación conveniente obtenga la gráfica de :

- a) $y = \frac{1}{x-4}$
- b) $y = \frac{1}{x} + 2$
- c) $y = \frac{1}{x-4} + 2$

16) Considere la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 + 6y - 4x - 3 = 0$. ¿Es posible ubicar un nuevo sistema de ejes coordenados, de modo que la ecuación de la gráfica respecto a los nuevos ejes x' e y' no contenga términos de primer grado?