Modulo 3

La derivada

1. Variación promedio

Sea *f* una función numérica cualquiera, definida en un intervalo abierto (*a,b*) que contiene al punto x_0. Consideremos un pequeño incremento *h, h* $\neq 0$, de la variable independiente, de manera que $x = x_0 + h,\ x \in (a,b)$.

La variación o incremento de *f* entre x_0 y x, se define como

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

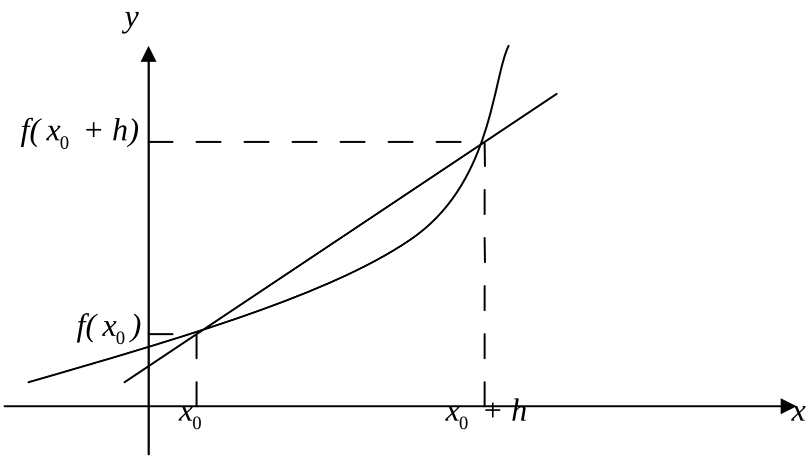
La variación o incremento de x entre x_0 y $x = x_0 + h$, se define como

$$\Delta x = x - x_0 = h$$

La variación promedio de *f* entre x_0 y x, se mide con el llamado *cociente incremental o Cociente de Newton de f en* x_0 *:*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Geométricamente la variación promedio de f entre x_0 **y** $x = x_0 + h$ ***representa la pendiente de la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos (*** x_0 ***, f(*** x_0 ***)) y (*** $x_0 + h$ ***, f(*** $x_0 + h$ ***))***



Cuando *h* decrece infinitamente la variación promedio tiende a la *variación instantánea de f en el punto* x_0.

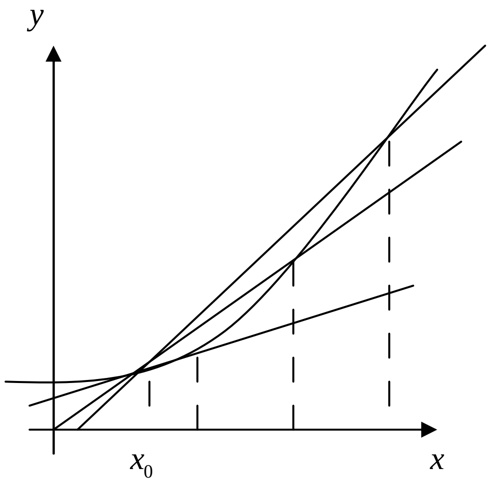
Derivada de *f* en x_0 **:** se define la derivada de f en x_0 y se escribe $f'(x_0)$ a

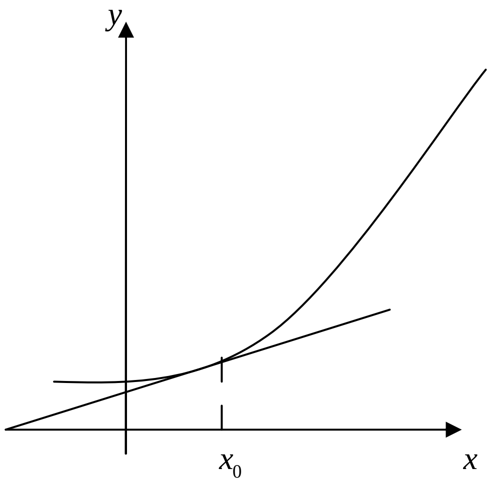
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Siempre que el límite exista y en tal caso se dice que *f es derivable en* x_0

Geométricamente a medida que h decrece, la recta secante a la gráfica de *f* que pasa por los puntos *(* x_0 *,f(* x_0 *)) y (* $x_0 + h$*, f(* $x_0 + h$*))* se va acercando a la recta tangente a la gráfica en el punto

(x_0 ,*f(* x_0 *))*. Así, la variación instantánea de *f* en x_0 representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto *(* x_0 *,f(* x_0 *)):*





Ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en *x*= x_0 **:**

Dada una función *y=f(x),* la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa x_0 se puede obtener fácilmente. La ecuación de una recta que pasa por el punto *(* x_0 *,* y_0 *)* y tiene pendiente m es dada por: $y = m(x - x_0) + y_0$

Luego, la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x_0 será aquella para la cual $y_0 = f(x_0)$, *m=f´(* x_0 *)*

La función derivada:

En lugar de elegir un valor numérico x_0 para la variable independiente, podemos trabajar con un valor arbitrario *x,* definiendo así la función derivada, ya que depende del valor de *x,* queda definida la función derivada como:

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, siempre que el límite exista, y en ese caso se dice que *f* es derivable en *x*.

La función f se dice derivable si tiene derivada en todos los puntos donde está definida

La derivada de f se escribe $f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = D_x f$

Ejemplo 1:

Sea *f(x)=2x+1*, hallar *f´(x)*

Calculamos el cociente Newton para un *x* cualquiera, haciendo

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$\frac{2(x+h)+1-(2x+1)}{h}=\frac{2x+2h+1-2x-1}{h}=$$

$$\frac{2h}{h}=2$$

$$\textit{Luego},\quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}2=2$$

Ejemplo 2:

Sea *f(x)*= $2x^2$, hallar *f´(x)*

Calculamos el cociente Newton para un *x* cualquiera, haciendo

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$\frac{2(x+h)^2-2x^2}{h}=\frac{2x^2+4xh+2h^2-2x^2}{h}=$$

$$\frac{4xh+2h^2}{h}=4x+2h$$

$$\textit{Luego},\quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}4x+2h=4x$$

Ejemplo 3:

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=2x^2$ en el punto de abscisa *x*=3.

Hemos calculado en el ejemplo 2 la función derivada o simplemente la derivada de $f(x)=2x^2$, luego la pendiente de la recta tangente en *x*=3 será la derivada en *x*=3:

$f'(x)=4x \quad \Rightarrow \quad f'(3)=12$ =m

Por lo tanto reemplazando en $y=m(x-x_0)+y_0$

Tenemos $y=12(x-3)+f(3)$ y como *f (3)*=18

$y=12(x-3)+18 \quad \Rightarrow \quad y=12x-18$ es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en *x*=3.

Actividades:

1) Calcular la variación promedio de *f* entre x_0 y x_0 + *h* de las siguientes funciones:

$a)\,f(x)=k \qquad b)\,f(x)=x \qquad c)\,f(x)=x^2 \qquad d)\,f(x)=x^3 \qquad e)\,f(x)=\sqrt{x}$

2) Sea $f(x)=x^2$, encuentre la ecuación de la recta secante a la gráfica de *f* en los puntos (1,1) y (1+*h* , *f(1+h)*) para los siguientes valores de *h*:

h=2; h=1; h=-1; h=-2.   Grafique y comente lo que observa.

3) Calcule la variación instantánea de *f* en x_0 de las siguientes funciones:

$a)\, f(x)=k \qquad b)\, f(x)=x \qquad c)\, f(x)=x^2 \qquad d)\, f(x)=x^3 \qquad e)\, f(x)=\sqrt{x}$

4) Sea $f(x)=x^2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (1,1). Grafique.

2-Reglas de derivación:

El cálculo de las derivadas utilizando la definición puede resultar engorroso. Sin embargo conociendo ciertas derivadas básicas y las reglas de derivación la tarea puede ser más sencilla:

Derivadas básicas:

$1.\, f(x)=k \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0 \quad k$ constante

$2.\, f(x)=x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=1$

$3.\, f(x)=x^r \quad \Rightarrow \quad f'(x)=rx^{r-1} \quad r\in\mathbb{Q}$

$4.\, f(x)=senx \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\cos x$

$5.\, f(x)=\cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-senx$

$6.\, f(x)=\ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$7.\, f(x)=e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=e^x$

Observación: en el caso 3, para que exista la derivada en *x=0, r* debe ser un número tal que x^{r-1} esté definida en un entorno del 0.
Las derivadas 6 y 7 las aceptaremos por ahora sin demostración.

Demostración:

1. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k-k}{h}=0$

2. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=1$

3. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^r-x^r}{h}$

usando el binomio de Newton escribimos:

$$(x+h)^r=\sum_{k=0}^{r}C(r,k)x^{r-k}h^k=x^r+rx^{r-1}h+\sum_{k=2}^{r}C(r,k)x^{r-k}h^k=x^r+rx^{r-1}h+h^2P(x,h)$$

de la última sumatoria hemos sacado factor común h^2 y el resto es una expresión polinómica en *h* y *x*. Por lo tanto sustituyendo en el límite:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^r-x^r}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^r+rx^{r-1}h+h^2P(x,h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{rx^{r-1}h}{h}+\frac{h^2P(x,h)}{h}=rx^{r-1}+\lim_{h\to 0}hP(x,h)=rx^{r-1}$$

4. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{senxcosh+senh\cos x-senx}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{senx(cosh-1)+\cos xsenh}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{senx(cosh-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\cos xsenh}{h}=$$

$$=senx\lim_{h\to 0}\frac{(cosh-1)}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{senh}{h}=senx.0+\cos x.1=\cos x$$

Observemos que en este caso pudimos expresar el límite de una suma como suma de los límites porque esos límites existen.

5. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos xcosh-senhsenx-\cos x}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(cosh-1)-senxsenh}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(cosh-1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{senxsenh}{h}=$$

$$=\cos x\lim_{h\to 0}\frac{(cosh-1)}{h}-senx\lim_{h\to 0}\frac{senh}{h}=\cos x.0-senx.1=-senx$$

Reglas de derivación:

Sean f y g funciones derivables en x:

1. Derivada de la suma de funciones:

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

2. Derivada del producto de funciones:

$$(f.g)'(x)=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$$

3. Derivada del cociente de funciones:

Si $g(x)\neq 0$, entonces $(\frac{f}{g})'(x)=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

4. Derivada de la composición:

$(f\circ g)'(x)=f'(g(x)).g'(x)$ a esta regla se la conoce como la Regla de la Cadena.

Ejemplos:

En los primeros dos ejemplos aplicamos la regla básica de derivación de una potencia:

1) $si \quad f(x)=x^{33} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=33x^{32}$

2) $si \quad f(x)=\sqrt[5]{x^3} \quad\Rightarrow\quad escribimos \quad f(x)=x^{\frac{3}{5}}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}}$$

En el siguiente ejemplo aplicaremos la regla de suma de funciones, además de reglas básicas:

3) $si \quad f(x) = x^2 + x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x + 1$

En el siguiente aplicaremos la regla del producto de funciones además de reglas básicas:

4) $si \quad f(x) = (\sqrt{x} + x)(x+1) \quad \Rightarrow \quad escribimos \quad f(x) = (x^{\frac{1}{2}} + x)(x+1)$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = (x^{\frac{1}{2}} + x)'(x+1) + (x^{\frac{1}{2}} + x)(x+1)' =$$
$$= (\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 1)(x+1) + (x^{\frac{1}{2}} + x)(1) = (\frac{1+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}})(x+1) + (\sqrt{x} + x) =$$

$$= (\frac{x + 2x\sqrt{x} + 1 + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}) + (\sqrt{x} + x) = \frac{x + 2x\sqrt{x} + 1 + 2\sqrt{x} + 2x + 2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{3x + 4x\sqrt{x} + 1 + 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

En el siguiente ejemplo aplicaremos la regla del cociente:

5) $si \quad f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x+2}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(x^2 + x)'(x+2) - (x^2 + x)(x+2)'}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{(2x+1)(x+2) - (x^2 + x)(1)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x + x + 2 - x^2 - x}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 2}{(x+2)^2}$$

Finalmente veremos un ejemplo con el uso de la regla de la cadena o la regla de derivación para composición de funciones:

6) $si \quad f(x) = (x^2 + 1)^9$ planteamos a f como una composición de funciones, llamando

$u(x) = (x^2 + 1) \quad y \quad t(x) = x^9$

De este modo $f(x) = (t \circ u)(x) = t(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^9$

Por lo tanto $f'(x) = t'(u(x)).u'(x) = 9(x^2 + 1)^8.2x = 18x(x^2 + 1)^8$

Actividades:

5) Encontrar la función derivada de las siguientes funciones:

$a)\ f(x)=x^2+5x-101 \qquad b) g(x)=x^{23}+50x^{17}+223$

$c) h(u)=(2u)^3-3u \qquad d)\ j(t)=7t(t^3-2t)$

$e) k(x)=\dfrac{x^2+5x}{x-3} \qquad f\ ) m(v)=\dfrac{v^3-2v^2+v}{4}$

$g)\ f(x)=\dfrac{4}{3}\pi x^3 \qquad h) g(u)=\dfrac{u^5}{1-u^2}$

6) Se dispone de la siguiente información:

$$f(3)=1 \qquad g(3)=2 \qquad h(3)=-1$$
$$f'(3)=4 \qquad g'(3)=6 \qquad h'(3)=1$$

Hallar:

$a)(f+g)'(3) \qquad b)(f-g+h)'(3) \qquad c)(fg)'(3)$

$d)(fg-h)'(3) \qquad e)(\dfrac{f}{g})'(3) \qquad f\ )(\dfrac{fg}{h})'(3)$

7) Hallar la derivada de las siguientes funciones:

$a)\ f(x)=(x^2 \quad +5x-101)^5 \qquad b) g(x)=\sqrt{x^{23}+50x^{17}+223}$

$c) h(u)=((2u)^3-3u)^{101} \qquad d)\ j(t)=(7t-(t^3-2t))^9$

$e) k(x)=\dfrac{x^2+5x}{\sqrt{x-3}} \qquad f\ ) m(v)=\dfrac{\sqrt[3]{v^3-2v^2+v}}{4-V}$

$g) g(x)=x^2 senx \qquad h)\ f(x)=tg(x)$

$i)\ f(x)=\cos(x^2)+\cos^2 x \qquad j)\ f(x)=\dfrac{cotgx}{1-senx}$

$k)\ f(x)=2\sec^4 x-3sen(4x) \qquad l\ )\ f(x)=\dfrac{2\cos x}{x+1}$

$m) g(x)=\dfrac{x^5}{e^x} \qquad n) k(x)=\dfrac{1}{x}+2\ln x-\dfrac{\ln x}{x}$

$ñ)\ f(x)=\ln^2 x-\ln(\ln x) \qquad o)\ f(x)=\sqrt{\ln x+1}+\ln(\sqrt{x}+1)$

8) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las siguientes funciones en el punto dado:

$a) f(x) = 2x^2 + x - 1 \quad en\ el\ \ punto\ (1,2)$

$b) g(x) = \sqrt{x-1} \quad en\ el\ \ punto\ (2,1)$

$c) k(x) = \dfrac{x}{x-3} \quad en\ el\ \ punto\ (6,2)$

$d) f(x) = x + \dfrac{4}{x} \quad en\ el\ \ punto\ (2,4)$

$e) f(x) = \cos x \quad en\ el\ \ punto\ (\frac{3}{2}\pi, 0)$

$f) f(x) = 4tg2x \quad en\ el\ \ punto\ (\frac{\pi}{8}, 4)$

9) Hallar los puntos en los que las tangentes a la curva $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ son paralelas al eje de las abscisas.

10) En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$

11) Hallar la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto (1,1).

12) En qué punto de la curva $y^2 = 2x^3$ la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$

13) Escribir las ecuaciones de la recta tangente y perpendicular a la curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ en el punto (-2,5).

14) Escribir las ecuaciones de la recta tangente y perpendicular a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto cuya abscisa es 4.

15) Escribir las ecuaciones de la recta tangente y perpendicular a la curva $y = \sqrt[3]{x-1}$ en el punto (0, -1)

16) Escribir las ecuaciones de las tangentes y perpendiculares a la curva $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ en sus puntos de intersección con el eje de las abscisas.

17) Escribir las ecuaciones de la recta tangente y perpendicular a la curva $y = x^3 - 2\cos(\pi x) + \ln x^2$ en el punto de abscisa x=1.

3- Derivadas de orden superior:

Dada una función derivable *f(x)* definida en un intervalo abierto I, su derivada *f'(x)* es también una función en ese intervalo. Esta nueva función puede o no ser derivable. Si sucede que también es derivable, entonces su derivada se llama ***derivada segunda*** o ***derivada de segundo orden*** de *f* respecto de *x* y se denota *f''(x).*

Ejemplo:

Sea $f(x) = x^4 + x^3 + 1$ entonces su derivada es $f'(x) = 4x^3 + 3x^2$

Y como esta nueva función también es derivable puede calcularse su derivada que representará la derivada segunda de *f* $f''(x) = 12x^2 + 6x$

El proceso puede continuarse mientras la nueva función derivada sea derivable, y en general se denota con $f^{(n)}(x)$ a la n-ésima derivada o derivada de orden n, de la función *f* respecto de la variable *x*,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

4- Derivación implícita:

Consideremos una curva definida por una ecuación implícita, es decir *F(x,y)=0*

Hasta ahora hemos trabajado con curvas en las que fue posible despejar *y* como función de *x*, y en ese caso, decimos que la curva dada es la gráfica de *f*. Hemos podido de este modo, si *f* es derivable en x_0 respuesta al problema de encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en un punto (x_0, $f(x_0)$)

Sin embargo no siempre es posible o sencillo despejar *y* en función de *x*. ¿qué pasaría entonces si tuviéramos que dar la ecuación de la recta tangente a la curva *F(x,y)*=0 en un punto de la misma?

Ejemplo:

La ecuación $x^2 + y^2 - 4 = 0$ define en forma implícita una circunferencia. Podemos despejar *y*, obteniendo dos funciones:

$y = f_1(x) = \sqrt{4 - x^2}$ **e** $y = f_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

Veamos entonces que la curva dada NO ES LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN!

En efecto, la gráfica de f_1 es la semicircunferencia superior y la gráfica de f_2 es la semicircunferencia inferior.

Si tuviéramos como problema el determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto de coordenadas ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), podríamos pensar solo en el tramo de la curva que corresponde a

$$y = f_1(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

y entonces, como antes sabemos que para determinar la pendiente de esa recta basta con calcular la derivada de f_1 en $\sqrt{2}$. (Te proponemos que lo hagas como ejercicio, así podrás comparar con otra forma que te propondremos de hacerlo en las líneas siguientes)

Sin embargo no siempre es sencillo despejar *y* en función de *x*, pero aún así podemos pensar localmente a la curva como la gráfica de una función *y* = *y(x)*, y de ese modo hallar su derivada siguiendo el procedimiento que se conoce como derivación implícita, que nos permite encontrar *y'(x)* **aunque no podamos (o no querramos) despejar *y* en función de *x***.

Veamos con detalle lo que sigue:

Volvamos a la circunferencia de la que hablamos arriba, y consideremos su ecuación:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Sabiendo que *y* es localmente una función de *x*, hallar la derivada *y'(x)* en términos de *x* e *y(x)*.

Derivamos ambos miembros de la ecuación, sin olvidar que **como y depende de x, será necesario usar la regla de la cadena**:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 4) = \frac{d}{dx}0$$

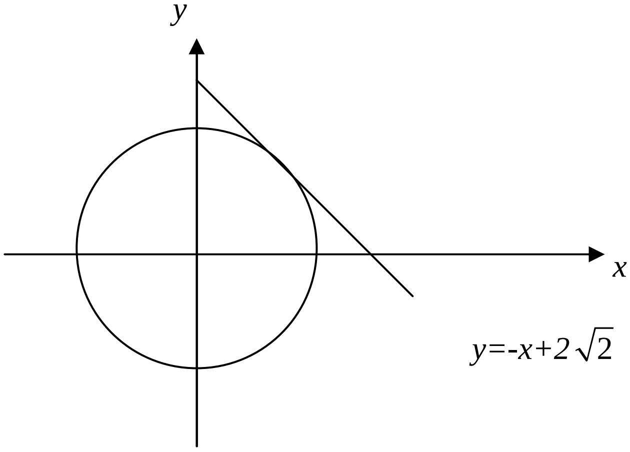
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad o \qquad 2x + 2yy' = 0$$

$$de \quad donde \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad o \qquad y' = -\frac{x}{y}$$

Por lo tanto si quisiéramos hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$,

Tenemos $y' = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$

Por lo tanto la ecuación de la recta tangente en $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ es $\quad y = -(x - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$



En este punto estamos en condiciones de demostrar la derivada de la función e^x *:*

$$
\begin{array}{ll}
y = e^x & \\
\ln y = x & \textit{aplicando logaritmo a ambos miembros} \\
\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = 1 & \textit{aplicando derivación implícita a ambos miembros respecto de x} \\
\dfrac{dy}{dx} = y & \\
y' = e^x & \textit{reemplazando } \dfrac{dy}{dx} \textit{ por } y' \quad y \quad y \textit{ por } e^x
\end{array}
$$

Actividades:

18) Hallar las derivadas de segundo orden de las siguientes funciones:

$a)\, f(x) = 4x^6 - 3x^3 + 2 \qquad b)\, f(x) = \dfrac{x^2}{1-x} \qquad c)\, f(x) = 2x^3 - (1-x^2)^2$

19) Demostrar que la función**:** $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{2}$ satisface la ecuación diferencial:

$$1 + y'^2 = 2yy''$$

20) Demostrar que la función**:** $y = xe^{-x}$ satisface la ecuación diferencial:

$$xy' = (1-x)y$$

21) Dada $y = x^3 - 5x^2 + 7x \quad -2, \qquad hallar \quad y'''$

22) Determinar y' por derivación implícita:

$a)\, x^3 - 3xy + y^3 = 2 \qquad b)\, \sqrt{y} - \sqrt{xy} = 2x \qquad c)\, (xy)^3 - x^3y^2 = y$

$d)\, y = \cos(x-y) \qquad e)\, \cot g(xy) + xy = 2 \qquad f)\, 2xy - \cos xy = seny$

$g)\, e^y = x + y \qquad h)\, \ln y + \dfrac{x}{y} = 2 \qquad i)\, \ln x + e^{\frac{-y}{x}} = 1$

23) Escribir las ecuaciones de la recta tangente y perpendicular a la curva $ye^y = e^{x+1}$ en el punto (0,1)

24) Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ en el punto (1,2)

25) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ en el punto (1,1)

26) Hallar las ecuaciones de la recta tangente y de la recta perpendicular a la curva $x^2 - y^2 + 2x - 6 = 0$ en el o los puntos cuya ordenada es y=3.

27) Usando el hecho de que $x = e^{\ln x}$ hallar *y'(x)***:**

$a) y = x^x$ $\qquad$ $b) y = (senx)^x$ $\qquad$ $c) y = x^{x^2}$

5- Derivabilidad y continuidad:

Hemos definido la derivada de una función en un punto como el límite cuando h tiende a o del cociente de Newton, siempre que ese límite exista. Los casos donde ese límite no existe pueden agruparse en 3 grupos:

1) Cuando existen los límites laterales del cociente de Newton pero son diferentes entre si:

$$f_+'(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad f_-'(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

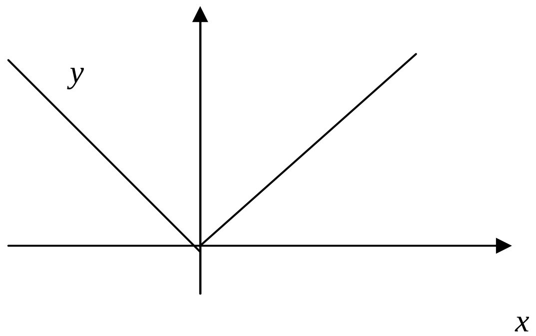
$$y\ f_+'(x_0) \neq f_-'(x_0) \qquad \Rightarrow \neg\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \Rightarrow \neg\exists \quad f'(x_0)$$

Ejemplo:

$f(x) = |x|$ Analicemos su derivabilidad en 0

$$f_+'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

$$f_-'(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1$$



Por lo tanto $f_+'(0) \neq f_-'(0)$ y en consecuencia la función no es derivable en *x=0*

2) Cuando el límite del cociente de Newton tiende a infinito:

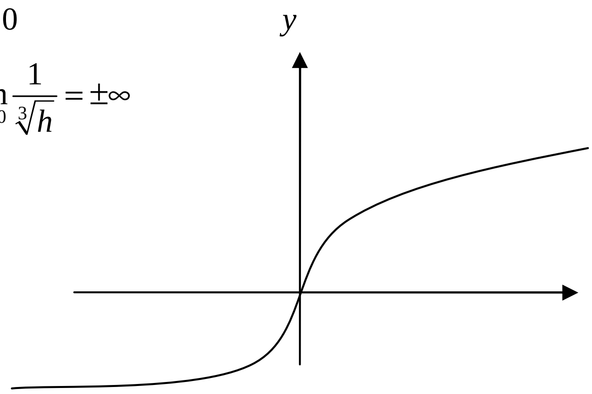
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty$$

$$\Rightarrow \neg\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \Rightarrow \neg\exists \quad f'(x_0)$$

Ejemplo: $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ Analicemos su derivabilidad en 0

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-\frac{1}{3}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \pm\infty$$

Por lo tanto la función no es derivable en *x=0*

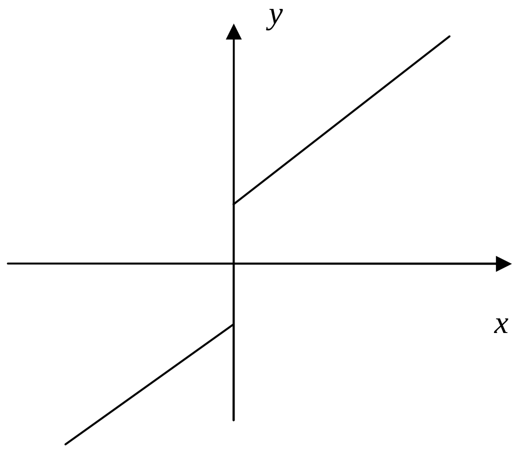


3) Cuando uno de los límites laterales del cociente de Newton existe y el otro tiende a infinito, esto es cuando la gráfica presenta un salto:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty \quad y \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=L$$

$$\Rightarrow \neg\exists \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \Rightarrow \quad \neg\exists \quad f'(x_0)$$

Ejemplo:
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 0 \\ x-1 & x<0 \end{cases}$$



Analicemos su derivabilidad en 0

$$f_+'(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h+1-1}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

$$f_-'(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h-1-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h-2}{h}=\infty$$

Por lo tanto la función no es derivable en *x=0*

Si observamos detenidamente el último ejemplo vemos que la función es derivable en los intervalos $(-\infty,0)$ *y* $(0,+\infty)$ sin embargo por ser discontinua en 0 la función no es derivable en ese punto. Este resultado es una consecuencia del siguiente teorema:

Teorema:

Si *f* es derivable en x_0 $\quad\Rightarrow\quad$ *f* es continua en x_0

Demostración:

f es derivable en x_0 $\quad\Rightarrow\quad \exists \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Como $\quad \lim_{h\to 0}h=0$

Por el criterio de existencia del límite tenemos que :

$$\lim_{h\to 0}f(x_0+h)-f(x_0)=0$$

Por lo tanto $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Que es una expresión equivalente a decir $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Por lo tanto f es continua en x_0 como queríamos demostrar.

Notemos que la expresión del contrarrecíproco del enunciado del teorema (equivalente con él) dice:

$$\boxed{\textit{Si } f \text{ no es continua en } x_0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ no es derivable en } x_0}$$

Es la aplicación del teorema que usamos en el ejemplo del caso 3 de funciones no derivables.

Actividades:

28) Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2kx & x \geq 0 \\ x & x<0 \end{cases}$$

Hallar el valor de k para *f* resulte derivable en $\mathbb{R}$

29)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & x \geq 2 \\ \mathrm{k}x & x<2 \end{cases}$$

Hallar el valor de k para *f* resulte continua en $\mathbb{R}$. Para el valor de *k* hallado la función resulta derivable en *x=2?*Graficar