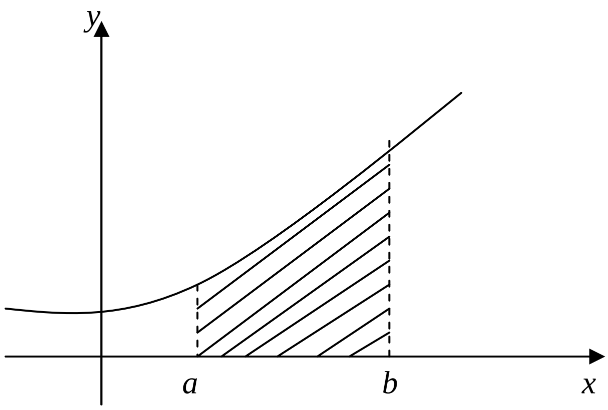
Modulo 5

Integración

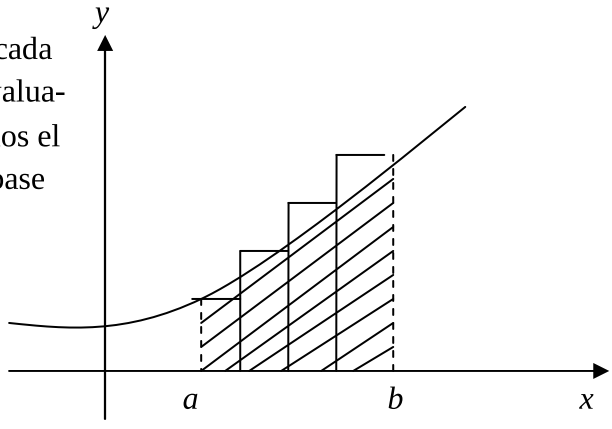
1. La integral definida

Uno de los problemas que dio origen al concepto de integral definida fue de origen geométrico:

Hallar el área de una región plana limitada por la gráfica de una función *f(x)* positiva y continua, el eje *x* y las rectas *x=a* y *x=b*.



Una respuesta geométrica al problema consiste en particionar la región bajo la gráfica de la función *f(x)* entre *x=a* y *x=b* utilizando un número finito de rectángulos tales que la suma de sus áreas aproximen el área de la región. Para hacer esto procedemos de la siguiente manera:



• Dividimos el intervalo [*a*,*b*] en n partes no necesariamente de igual longitud. En cada subintervalo *i* elegimos un punto x_i^* y evaluamos la función en ese punto. Consideramos el rectángulo Δx_i, con altura $f(x_i^*)$ y con base igual a la longitud del subintervalo Δx_i. Calculamos su área:

$A_i = f(x_i^*)\Delta x_i$

• Sumamos las áreas de los rectángulos Obtenidos y consideramos a ese valor como una Aproximación del área buscada:

$A \approx A_1 + A_2 + ... + A_n$

Si queremos mejorar la aproximación aumentamos el número de subintervalos, achicando la longitud de cada uno de ellos.

Esta subdivisión del intervalo se llama ***partición*** y llamaremos ***norma de la partición*** , que denotamos con $|P|$ a la mayor de las longitudes de los Δx_i $\Rightarrow |P| = \max \{ \Delta x_i \}$

A la suma que formamos con las áreas de los rectángulos se la llama ***Suma de Riemann*** de la función, correspondiente a la partición, se nota $J_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$

Ejemplo:

Calcular en forma aproximada el área bajo la curva $y = x^2 + 1$ y sobre el eje *x*, desde *x=0* hasta *x=4*

Comenzamos dividiendo el intervalo en 4 subintervalos de igual longitud, por lo tanto $\Delta x_i = 1$ para $i=1,2,3,4$.

Elegimos un punto en cada subintervalo, suele tomarse el punto medio, es decir que $x_i^* = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$

De este modo $x_1^* = \dfrac{1}{2}, \quad x_2^* = \dfrac{3}{2}, \quad x_3^* = \dfrac{5}{2}, \quad x_4^* = \dfrac{7}{2}$

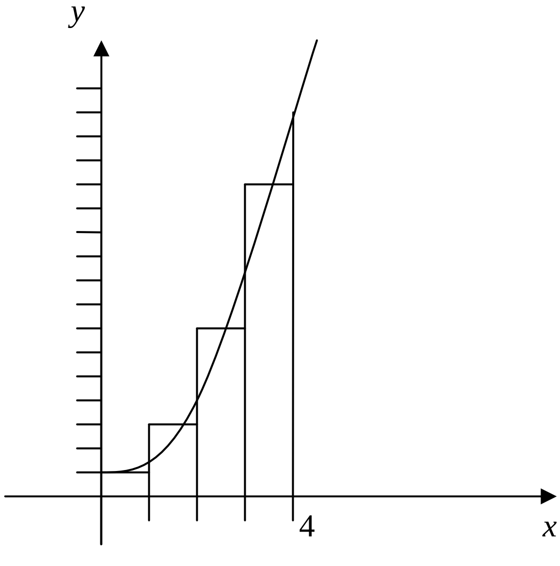
Consideramos entonces el área de los rectángulos R_i de base Δx_i y altura $f(x_i^*)$:

$A_i = f(x_i^*)\Delta x_i$

Sumamos para aproximar el área:

$$A \approx \sum_{i=1}^{4} A_i = \sum_{i=1}^{4} f(x_1^*)\Delta x_i = f(\tfrac{1}{2}).1 + f(\tfrac{3}{2}).1 + f(\tfrac{5}{2}).1 + f(\tfrac{7}{2}).1 =$$

$$= \frac{5}{4} + \frac{13}{4} + \frac{29}{4} + \frac{53}{4} = \frac{100}{4} = 25$$



Para mejorar la aproximación, podemos repetir este proceso, tomando 8 subintervalos de ½ de longitud:

$$[0,\frac{1}{2}],\quad [\frac{1}{2},1],\quad [1,\frac{3}{2}],\quad [\frac{3}{2},2],\quad [2,\frac{5}{2}],\quad [\frac{5}{2},3],\quad [3,\frac{7}{2}],\quad [\frac{7}{2},4]$$

y tomando los puntos medios de cada subintervalo, quedando:

$$x_1^*=\frac{1}{4},\quad x_2^*=\frac{3}{4},\quad x_3^*=\frac{5}{4},\quad x_4^*=\frac{7}{4},\quad x_5^*=\frac{9}{4},\quad x_6^*=\frac{11}{4},\quad x_7^*=\frac{13}{4},\quad x_8^*=\frac{15}{4}$$

Así el área aproximada es:

$$A\approx\sum_{i=1}^{8}A_i=\sum_{i=1}^{8}f(x_1^*)\Delta x_i=f(\frac{1}{4}).\frac{1}{2}+f(\frac{3}{4}).\frac{1}{2}+f(\frac{5}{4}).\frac{1}{2}+f(\frac{7}{4}).\frac{1}{2}+f(\frac{9}{4}).\frac{1}{2}+f(\frac{11}{4}).\frac{1}{2}+f(\frac{13}{4}).\frac{1}{2}+f(\frac{15}{4}).\frac{1}{2}=$$
$$=(\frac{17}{16}+\frac{24}{16}+\frac{41}{16}+\frac{65}{16}+\frac{97}{16}+\frac{137}{16}+\frac{185}{16}+\frac{241}{16})\frac{1}{2}=\frac{807}{32}=25,21$$

Se puede continuar el proceso y afinando los intervalos, nos acercamos cada vez más al área buscada. La idea es dividir en más subintervalos al intervalo de modo que la norma de la partición sea cada vez más chica (ya que estas dos cosas no son equivalentes), es decir que la norma tienda a cero.

Sea *f(x)* una función positiva, se define $I=\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i^*)\Delta x_i$

Si este límite existe, independientemente de la partición realizada y de los puntos tomados para evaluar la función, decimos que ***f* es integrable en [*a,b*].**

Al número I se lo denomina **integral de *f* entre *a* y *b*** y se nota $I=\int_a^b f(x)dx$

Teorema:

Si *f(x)* es una función continua y positiva en un intervalo [*a*,*b*], entonces *f* es integrable en [*a*,*b*], es decir que existe la integral definida entre *a* y *b*. Por lo tanto se tiene:

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

Observaciones:

1- Por definición se tiene que : $\int_a^a f(x)dx=0$ y $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

2- Por estar definida para funciones positivas, se tiene *I = A*, es decir que el área coincide con el valor de la integral.

3- El resultado del teorema puede extenderse para el caso en el que *f* presente un número finito de discontinuidades de primera especie, es decir de discontinuidades inevitables, a pesar de la existencia de los límites laterales para el punto de discontinuidad.

Es decir que si f es continua en $[a,b]$ salvo en un punto x_0 y existen los límites laterales:

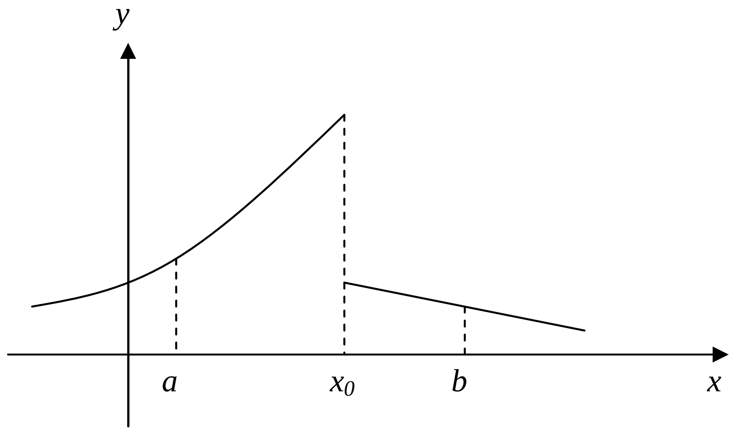
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1 \quad y \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$$

Entonces la integral de f entre a y b puede definirse como:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f_1(x)dx + \int_{x_0}^b f_2(x)dx$$

Donde • si $x \in [a, x_0)$ $\quad f_1(x) = f(x) \quad y \quad f_1(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$

• si $x \in (x_0, b]$ $\quad f_2(x) = f(x) \quad y \quad f_2(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$



El teorema nos garantiza la existencia del límite de las sumas de Riemann, para funciones continuas o con un número finito de discontinuidades de primera especie.

Volviendo al ejemplo:

Realizamos una partición del intervalo en n subintervalos de igual longitud, entonces $\Delta x_i = 4/n$

Identificamos entonces n-1 puntos interiores en el intervalo de tal forma que :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{4}{n}, \quad x_2 = \frac{8}{n}, \quad x_3 = \frac{12}{n}, ..., x_k = k\frac{4}{n}, ..., x_n = n\frac{4}{n} = 4$$

En cada subintervalo elegimos un punto, en este caso por comodidad elegiremos el extremo derecho de cada subintervalo, de modo que : $x_k^* = k\frac{4}{n}, \quad k = 1, ..., n$

Evaluamos la función en esos puntos, que nos dará la altura de cada rectángulo:

$$f(x_k^*) = f(k\frac{4}{n}) = (k\frac{4}{n})^2 + 1 = k^2(\frac{4}{n})^2 + 1$$

Consideramos entonces el área de los rectángulos R_k de base Δx_k y altura $f(x_k^*)$:

$$A_k = f(x_k^*)\Delta x_k = [k^2(\frac{4}{n})^2 + 1]\frac{4}{n} = k^2(\frac{4}{n})^3 + \frac{4}{n}$$

Sumamos para aproximar el área:

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} k^2(\frac{4}{n})^3 + \frac{4}{n} = (\frac{4}{n})^3 \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} 1$$

Como $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad y \quad \sum_{k=1}^{n} 1 = n$

Tenemos que $J_n = \frac{4^3}{6n^3} n(n+1)(2n+1) + 4$

Calculamos el límite para obtener la integral:

$$\lim_{|P|\to 0} J_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4^3}{6n^3} n(n+1)(2n+1) + 4 = 2\frac{4^3}{6} + 4 = \frac{76}{3}$$

Es decir que $A = I = \int_0^4 (x^2+1)dx = \frac{76}{3}$

Propiedades de la integral definida:

1. **Linealidad**:
Sean *f(x)* y *g(x)* dos funciones integrables en [*a*,*b*] y sea *k* una constante, entonces:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2. Comparación:
Sean *f(x)* y *g(x)* dos funciones integrables en [*a*,*b*], entonces:

$$Si \quad \forall x \in [a,b], \quad f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

3. Aditividad en el intervalo:
Sea *f(x)* una función integrable en [*a*,*b*], entonces:

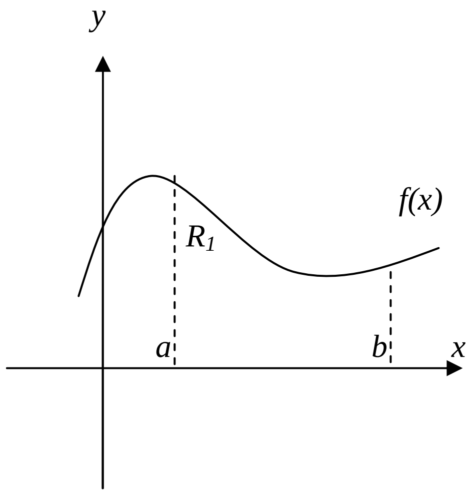
$$Si \quad x_0 \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx$$

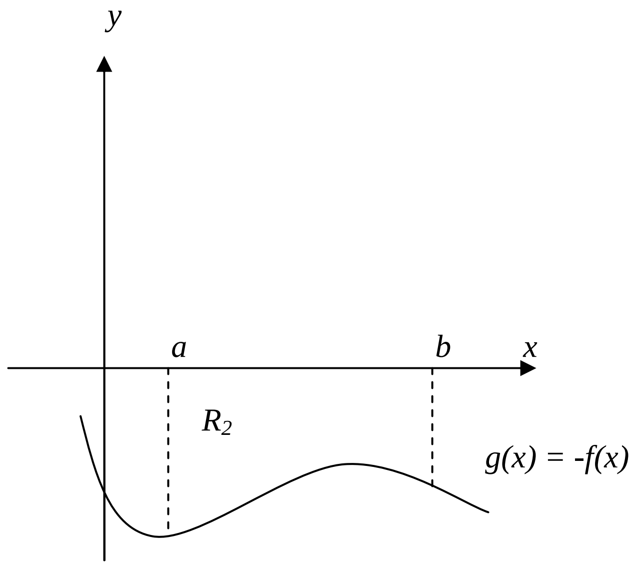
4. Acotamiento:
Sean *f(x)* una función integrable en [*a*,*b*], entonces:

Si M = max[*f*] en [*a*,*b*] y m = min[*f*] en [*a*,*b*] $\Rightarrow \quad m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

Interpretación geométrica:

Observemos las siguientes gráficas de *f* y de *g* = -*f*:





En la figura de la izquierda R_1 está limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ y tiene área A.

En la figura de la izquierda R_2 está limitada por $y = g(x) = -f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ y es claro que también tiene área A.

Por lo tanto se tiene que A = $\int_a^b f(x)dx$

Y en consecuencia, se define $\int_a^b g(x)dx = -\int_a^b f(x)dx = -A$

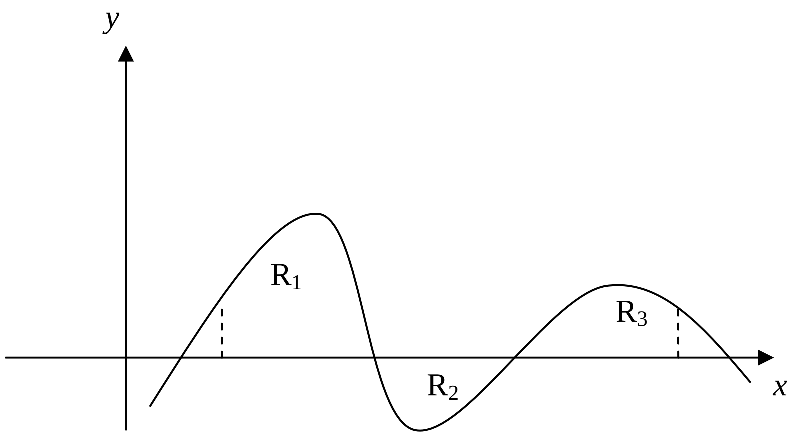
Así podemos decir que:

• Si la función *f* es positiva e integrable en un intervalo, su integral definida da por resultado el valor del área bajo la grafica de *f* y sobre el eje *x* en ese intervalo.

• Si la función *g(x) = - f(x)* para *x* en un intervalo y en ese intervalo, *f* es positiva e integrable, se define la integral definida de *g* en dicho intervalo, como el opuesto de la integral definida de *f* en ese intervalo (resulta ser el opuesto del área sobre la gráfica de *g* y bajo el eje *x* en ese intervalo).

Generalizamos de esta manera la definición de la integral para funciones reales, tanto positivas como negativas. La propiedades vistas para la integral definida son válidas para funciones a valores reales.

En general, si la gráfica de la función limita una región *R*, en la que parte de la misma se encuentra por arriba del eje de las *x* y parte por debajo, podemos interpretar a la integral definida como la diferencia entre el área que queda por encima del eje *x* y el área que queda por debajo:



$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3$ *donde* A_i *es el área de* R_i

Por otra parte si nuestro interés es hallar el valor del área de la región R, debemos calcular la integral definida del valor absoluto de f(x):

Área(R) = $\int_a^b |f(x)|dx = A_1 + A_2 + A_3$

Actividades:

1) Sabiendo que:

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx = 10, \quad \int_{-1}^{5} g(x)dx = -2 \quad y \quad \int_{-1}^{5} h(x)dx = 12$$

$$Hallar \quad \int_{-1}^{5}[3f(x) + 2g(x) - h(x)]dx$$

2) Sabiendo que:

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx = 10, \quad \int_{-1}^{7} f(x)dx = 5 \quad y \quad \int_{5}^{9} f(x)dx = -2$$

$$Hallar \quad a)\int_{5}^{7} f(x)dx \quad b)\int_{7}^{9} 4f(x)dx \quad c)\int_{9}^{7} f(x)dx$$

3) Sea *f(x)=-4x+1* definida en [-2,2] ¿Qué cotas pueden darse para la integral definida en ese intervalo?

4) Sea *f* una función impar definida en los reales y positiva en [0,5], se sabe que $\int_0^5 f(x)dx = 7$

a) Calcular $\int_{-5}^{5} f(x)dx$
b) Calcular el área comprendida entre *y=f(x), y=0, x=-5, x=5*

5) Sea *f* una función par definida en los reales y negativa en [0,5], se sabe que $\int_0^5 f(x)dx = -7$

c) Calcular $\int_{-5}^5 f(x)dx$
d) Calcular el área comprendida entre *y=f(x), y=0, x=-5, x=5*

6) Muestre gráficamente la validez del siguiente enunciado:

Si *f* y *g* son funciones continuas en [*a*,*b*] y $f(x) \le g(x), \forall x \in [a,b]$, queda definida una región R que puede describirse como R={ $(x,y)/a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$, cuya área puede calcularse usando la expresión: $Area(R) = \int_a^b (g(x) - f(x))dx$

2- Los teoremas fundamentales del cálculo integral:

Hemos visto que si una función es continua en un intervalo, es integrable, pero calcular su integral hallando el límite de las sumas de Riemann suele no ser una tarea sencilla. Veremos ahora, a partir de algunas definiciones y haciendo uso de los Teoremas fundamentales del cálculo, cómo hallar el valor de una integral.

Función Integral:

Sea *f* una función continua en [*a*,*b*]. Para cada $x \in [a,b]$ definimos la función:

$G(x) = \int_a^x f(u)du$ a la que denominamos función integral de *f* en $[a,b]$

Es importante enfatizar que estamos definiendo una función, es decir que el resultado de la integral que se calcula no es un número, sino una función que depende de *x*.

¿Qué interpretación hacemos de G(x)?

<u>Veamos en este ejemplo su significado</u>:

Tomamos la función *f(x)= x*. Supongamos que queremos calcular la integral de la función entre *x=0* y *x=3*. Como ya hemos dicho que la integral de una función positiva es el área bajo la curva, se tiene que:

$\int_0^3 f(x)dx = \frac{3.3}{2} = \frac{9}{2}$ utilizando la fórmula para el área de un triángulo base por altura sobre 2.

Si ahora queremos calcular la función integral tenemos:

$G(x) = \int_0^x f(u)du = \frac{x.x}{2} = \frac{x^2}{2}$ obtenemos ahora la función área del triángulo de igual base y altura.

Y de ese modo, $\int_0^3 f(x) = G(3) = \frac{3^2}{2} = \frac{9}{2}$

Analizaremos ahora que significado tiene la derivada de esta función integral. El teorema que veremos a continuación es uno de los teoremas más importantes del cálculo:

Teorema Fundamental del Cálculo:

La función *G(x)* es derivable en (*a*,*b*) y se cumple que:

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

Demostración:

Tenemos por la definición de derivada que: $G'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}$

Y por la definición de G :

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \frac{1}{h}[\int_a^{x+h} f(u)du - \int_a^x f(u)du] =$$

$$= \frac{1}{h}[\int_a^x f(u)du + \int_x^{x+h} f(u)du - \int_a^x f(u)du] =$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)du$$

Sea h>0 y $x \in (a,b)$:

Por ser *f* continua en [*a*,*b*], *f* es continua en [*x*,*x*+*h*], Luego el Teorema de Máximos y mínimos nos garantiza la existencia de extremos absolutos en el intervalo cerrado.

Sean m_h *y* M_h el mínimo y el máximo respectivamente, entonces por la propiedad de acotamiento:

$$m_h h \le \int_x^{x+h} f(u)du \le M_h h \qquad \Rightarrow \quad m_h \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)du \le M_h$$

Notemos que tanto el máximo como el mínimo dependen del valor de h, entonces cuando h se acerca a 0, el máximo y el mínimo tienden al valor de *f(x).*

Luego el Teorema del Encaje nos garantiza que :

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)du = f(x)$$

Análogamente, cuando h<0, se tiene :

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)du = f(x)$$

Por lo tanto $G'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)du = f(x)$

Queda así probado el teorema.

Ejemplo:

Se quiere calcular *A'(x),* siendo *A(x)=* $\int_1^x e^u \cos(2u)du$

El teorema precedente nos permite decir que *A'(x)=* $e^x \cos(2x)$

Antiderivada:

Una función *F(x)* es la antiderivada o primitiva de una función *f(x)* si :

F'*(x)=f(x)* para todos los valores de *x* en el dominio de *f*

Notemos que decimos que *F* es ***una*** primitiva de *f*, ya que no es única, pues si *F(x)* es una primitiva de *f*, entonces *F(x) + k* , también lo es para cualquier valor de la constante k.
En efecto *(F(x)+k)' = F'(x)=f(x)* , cumpliendo la definición de primitiva.

Suele decirse entonces que dos primitivas de una misma función difieren en una constante.
(Recordar el Corolario 2 del Teorema del Valor Medio visto en el Módulo 4)

Teorema: Regla de Barrow

Sea *f* continua en [*a,b*] y sea *F* una primitiva de *f* en [*a,b*], luego:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Demostración:

Sabemos por el Teorema Fundamental del Cálculo que:

Si $G(x)=\int_a^x f(u)du \quad \Rightarrow \quad G'(x)=f(x) \quad \forall x\in(a,b)$

Por hipótesis *F(x)* es una primitiva de *f(x)* entonces *G(x)=F(x)+k*, siendo k constante

Como $G(a)=\int_a^a f(u)du=0$ y *G(a)-F(a)-k=0* entonces *-F(a)=k*

Luego G(x)=F(x)-F(a)

Si *x=b* se tiene que *G(b)=F(b)-F(a)*

Y como $G(b)=\int_a^b f(u)du$

Se cumple que $\int_a^b f(u)du=F(b)-F(a)$

Ejemplo:

Dada $f(x)=x^2+1$ *calcular* $\int_0^4 f(x)dx$

Buscamos entonces una primitiva de *f(x),* hallamos $F(x)=\frac{1}{3}x^3+x+k$

Aplicamos la Regla de Barrow $\int_0^4 f(x)dx=F(4)-F(0)=\frac{64}{3}+4=\frac{76}{3}$

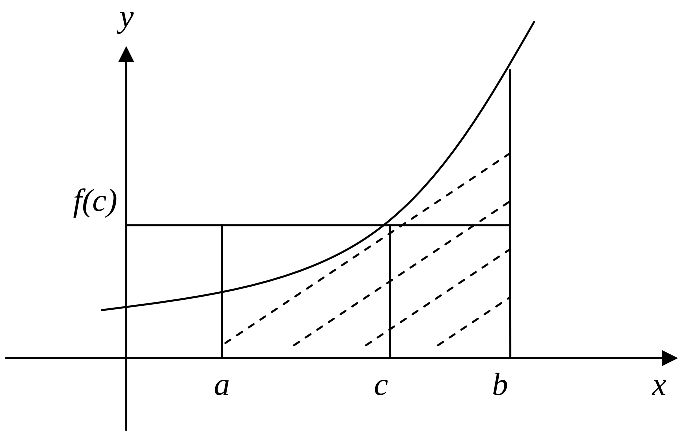
(Recordemos el primer ejemplo planteado con el límite de las sumas de Riemann)

Teorema del Valor Medio para Integrales:

Si *f* es continua en [*a*,*b*] , existe un número c entre *a y b* tal que:

$$\int_a^b f(x)dx= f(c)(b-a)$$

Lo que plantea el teorema es que siempre puede hallarse un rectángulo de base (*b*-*a*) con área igual al área bajo la curva de *f:*



Demostración:

$G(x)=\int_a^x f(u)du$, sabemos que G es derivable , luego es continua y por lo tanto satisface la hipótesis del Teorema del Valor medio para derivadas :

Existe c $\in$ (a,b) *tal que* $G(b)-G(a)=G'(c)(b-a)$

Teniendo en cuenta que : $G(b)=\int_a^b f(u)du$, $G(a)=\int_a^a f(u)du=0$ y que *G'(c)=f(c)*

Tenemos que existe c$\in$ (a,b) *tal que* $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

Queda demostrado el teorema.

La integral indefinida:

El conjunto de todas las antiderivadas de *f(x)* es la ***integral indefinida*** de *f* respecto de *x*, es decir que:

$\int f(x)=F(x)+k$, esa integral representa el conjunto de todas las funciones que tienen por derivada a *f(x)*

Actividades:

7) Justificar que:

a) $\int_0^1 x\ dx \geq \int_0^1 x^2\ dx$ **b)** $3\leq \int_1^4 \sqrt{x}.dx \leq 6$

8) a) Probar que $\int_1^4 xdx \leq \int_1^4 \sqrt{1+x^2}dx$

b) Probar que $\int_1^4 \sqrt{1+x^2}dx \geq 3.\sqrt{2}$

c) Probar que $\int_1^4 \sqrt{1+x^2}dx \leq 7,5$ ***(Indicación: Usar parte a))***

9) Hallar la primitiva más general de las funciones dadas y verificar la respuesta mediante derivación.

a) *f(x) = 4 x^3 – 7 x + 1* *b) g(x) =* $\sqrt{x}+4\ \cos\ x - \sec^2 x$

10) Hallar las siguientes integrales y verificar algunas respuestas por derivación:

a) $\int x^4 dx$ b) $\int x^{\frac{3}{4}} dx$ c) $\int x^{-5} dx$ d) $\int \frac{1}{x^6} dx$

e) $\int 10x^{-3} dx$ f) $\int 5.x^{\frac{-5}{4}} dx$ g) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}} dx$ h) $\int (2x^3 + 2x^2 + x + 5) dx$

i) $\int \left(3x^4 + 8.x^{\frac{3}{4}} + 2.x^{-5} \right) dx$

11) Hallar *f(x)* sabiendo que:

a) $\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}^2}$, $f(1) = 5$ b) $\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{x^{3/4} + 4\,sen\,x}$, $\mathbf{f(0) = -3}$

12) Hallar y graficar todas las funciones que verifiquen $f'(x) = 0,5x - 6$
¿Existe alguna que pase por **(3,– 1)** ? Si es así, hallarla.

13) Dada la función ***f(x) = sen (2x +3)*** decidir cuál de las siguientes funciones es una primitiva de ***f,*** y probarlo.

$\mathbf{F_1(x) = -\cos(2x + 3)}$ $\mathbf{F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x+3)+2}$

$\mathbf{F_3(x) = -2\cos(2x + 3) + 1}$ $\mathbf{F_4(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x+3)+\sqrt{3}}$

14) Hallar la función $f(x)$, si $f^{(3)}(x) = 24x + 30$, $f^{(2)}(-1) = -8$, $f^{(1)}(0) = 5$ y $f(0) = 1$

15) Si $f''(x) = 2.x$, $f'(2) = -5$ y $f(0) = 1$, hallar la función f.

16) La ecuación de la recta tangente a una curva en el punto de coordenadas **(1,2)** es **y =x+1** . Si en cualquier punto **(x,y)** de la misma es **y''=6x** , hallar una ecuación de la curva.

17) Verificar que *f(x)=2x³* cumple con las hipótesis del Teorema del valor medio para el cálculo integral. Si $\int_{-2}^{4} 2.x^3 dx = 120$, hallar un rectángulo de base [-2,4] de área 120.

18) Dadas las siguientes funciones, calcular su derivada

a) F(x)= $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ **b) G(x)=** $\int_{-\pi}^{x} \sqrt{2 + sent}\; dt$

19) Calcular: a) $\int_0^1 \left(6x^3 + 5x - 3\right) dx$ b) $\int_{-4}^{4} |2x| \; dx$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\; dx$ siendo $f(x) = \begin{cases} x & si \;\; x \le 0 \\ senx & si \;\; x > 0 \end{cases}$

19) Graficando previamente en forma aproximada, calcular
a) el área bajo la curva **y = 4 x² - 4x +3** limitada por **x = -1** y **x = 2.**
b) el área del trapecio limitado por las rectas **x + 2y = 2** , **x + 2y = 4** , **x = 0** , **y = 0**

20) Hallar el área de la región limitada por las gráficas de:

a) $y = x^2 - x$, $y = 2x + 1$
b) $y = x^3$, $\mathbf{y = \sqrt[3]{x}}$
c) $y = |2x - 4|$, $y = -3x + 5$, $y = 3x - 7$
d) $x = 2 - y - y^2$, $x = 0$
e) $f(x) = -x^2 + 6$, $y + 2x - 3 = 0$
f) $y = x^3$, *el eje x* , $x = -3$, $x = 1$

21) Calcular el área de los recintos siguientes:

a) $y \leq 16 - 2x^2$, $y \geq 8$
b) $y \geq x^3$, $y \geq \frac{-x}{2}$, $y \leq x + 6$

c) $y \geq x^2 - 4$, $y + 3x \leq 0$

22) a) Calcular la integral $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$

b) Calcular el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje x.
c) Comparar los resultados de a) y b) y explicarlos.

3- Técnicas de integración (sustitución y por partes)

Se sabe que una función **F** es una primitiva de la función ***f*** si se verifica la igualdad: ***F'(x) = f(x)***

Sabemos también que la notación $\int f(x)\,dx = F(x)$ indica una primitiva de ***f*** (integral indefinida).

No siempre es fácil obtener primitivas, en algunos ejercicios hemos encontrado primitivas probando con distintas funciones, aquí se describen algunos métodos que serán útiles para obtenerlas en muchas situaciones.

Método de sustitución:

Sea *g* una función derivable con codominio *I*. Sea *f* una función continua, definida en *I* y sea *F* una primitiva de *f* en *I*, luego se tiene que:

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = F(g(x)) + k$$

Demostración:

Si se sabe que *f* = *F* **'**, es decir ***F*** es una primitiva de ***f***, entonces usando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x)) + k\right] = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Por lo tanto se cumple que $\int f(g(x)).g'(x)\,dx = F(g(x)) + k$

Por otra parte si hacemos la "sustitución" ***u = g(x)*** , su diferencial es ***du = g'(x) dx*** y entonces podemos escribir:

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{f(u)}\ \underbrace{g'(x)\ dx}_{du} = \int f(u)\ du = \int F\ '(u)\ du = \mathbf{F(u) + k = F(g(x)) + k}$$

Ejemplo 1:
Calcular $\int (x^2+1)^3 2xdx$

Aquí debemos identificar en el integrando la función *f(g(x))* y *g'(x)*

Notemos que podemos identificar $u = x^2+1$, siendo $du = 2xdx$

Entonces tenemos $\int (x^2+1)^3 2xdx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + k = \frac{(x^2+1)^4}{4} + k$

Ejemplo 2:
Calcular $\int (x^3+x)^9 (3x^2+1)dx$

Hacemos la sustitución llamando $u = x^3+x$, entonces $du = (3x^2+1)dx$

Entonces $\int (x^3+x)^9 (3x^2+1)dx = \int u^9 du = \frac{u^{10}}{10} + k = \frac{(x^3+x)^{10}}{10} + k$

Ejemplo 3:
Calcular $\int sen5xdx$

En este caso escribiremos la integral como: $\frac{1}{5}\int 5sen5xdx$

Así hacemos la sustitución llamando $u = 5x$, entonces $du = 5dx$

Entonces $\int sen5xdx = \frac{1}{5}\int 5sen5xdx = \frac{1}{5}\int senudu = -\frac{1}{5}\cos u + k = -\frac{1}{5}\cos 5x + k$

Nota: en el caso de las integrales definidas, calculamos primero la primitiva y luego aplicamos la regla de Barrow

Si tomamos el ejemplo 1 y queremos calcular $\int_1^3 (x^2+1)^3 2xdx$

Como hallamos la primitiva $= \frac{(x^2+1)^4}{4} + k$

Se tiene $\int_1^3 (x^2+1)^3 2xdx = \frac{(3^2+1)^4}{4} + k - \frac{(1^2+1)^4}{4} - k = \frac{10^4}{4} - \frac{2^4}{4}$

Método de integración por partes:

Si ***u(x)*** *y* ***v(x)*** son derivables entonces

$$\int u(x)\ v'(x)\ dx = u(x)\ .\ v(x) - \int u'(x)\ v(x)\ dx$$

Demostración:

Utilizamos la fórmula de derivada de un producto:
$[u(x)\ .\ v(x)]' = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$

Integrando ambos miembros respecto de **x** se obtiene:

$$\int [u(x)\ .\ v(x)]'\ dx = \int u'(x)\ v(x)\ dx + \int u(x)\ v'(x)\ dx$$

Entonces
$u(x)\ .\ v(x) = \int u'(x)\ v(x)\ dx + \int u(x)\ v'(x)\ dx$

y despejando la última integral obtenemos:

$$\int u(x)\ v'(x)\ dx = u(x)\ .\ v(x) - \int u'(x)\ v(x)\ dx$$

que se conoce con el nombre de **fórmula de integración por partes.**

Observación: Si la integral es definida, además de buscar la primitiva deberá aplicarse la regla de Barrow:

$$\int_a^b u(x)\ v'(x)\ dx = u(x)\ v(x)\ \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\ v(x)\ dx\ =\ u(b)\ v(b)\ -\ u(a)\ v(a)\ -\ \int_a^b u'(x)\ v(x)\ dx$$

Ejemplo 1:
Calcular $\int xe^x dx$

Aquí debemos identificar en el integrando la función *u(x)* y *v'(x)* , en realidad debemos elegirlas ya que muchas veces la elección no nos conduce a la resolución de la integral y volvemos al principio para hacer una nueva elección.

Notemos que podemos identificar $u(x) = x \quad y \quad dv = v'(x)dx = e^x dx$
Tenemos entonces que $\quad du = dx \quad y \quad v(x) = e^x$

Por lo tanto $\int xe^x dx\ = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + k$

Ejemplo 2:
Calcular $\int x \ln x dx$

Podemos identificar $u(x) = \ln x \quad y \quad dv = xdx$

Tenemos entonces que $du = \frac{1}{x}dx \quad y \quad v(x) = \frac{x^2}{2}$

Notemos que a la función que se elige como *dv* debemos conocerle una primitiva, por eso en este caso no elegimos *lnx* sino *x* en ese lugar.

Por lo tanto $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + k$

Ejemplo 3:

Calcular $\int \ln x dx$

Podemos identificar $u(x) = \ln x \quad y \quad dv = dx$

Tenemos entonces que $du = \frac{1}{x}dx \quad y \quad v(x) = x$

Por lo tanto $\int \ln x dx = x\ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + k$

Ejemplo 4:

Calcular $\int e^x \cos x dx$

Podemos identificar $u(x) = e^x \quad y \quad dv = \cos x dx$

Tenemos entonces que $du = e^x dx \quad y \quad v(x) = senx$

Por lo tanto $\int e^x \cos x dx = e^x senx - \int e^x senx dx$

Aún no sabemos resolver esa integral, por lo tanto volvemos a aplicar el método:

$u(x) = e^x \quad y \quad dv = senxdx$

$du = e^x dx \quad y \quad v(x) = -\cos x$

Entonces:

$$\int e^x \cos x dx = e^x senx - [-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx =$$

$$= e^x senx + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

En el segundo miembro aparece nuevamente la integral que estamos calculando , por lo tanto haciendo un pasaje de términos y adicionando una constante de integración

$$2\int e^x \cos x dx = e^x senx + e^x \cos x + k$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}(e^x senx + e^x \cos x + k)$$

Este tipo de integrales suele describirse como integrales cíclicas

Integrales trigonométricas:

Para el caso de las integrales trigonométricas haremos uso de las identidades conocidas:

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$sen(x+y) = senx\cos y + seny\cos x$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - senxseny$$

De estas igualdades se deducen las siguientes:

$$sen2x = 2senx\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x)$$
$$\Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x = (1-sen^2 x) - sen^2 x$$
$$\Rightarrow \quad sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Entonces cuando tenemos que resolver integrales de la forma:

1) $\int sen^n x\cos^m xdx \quad con \quad n,m \in \mathbb{Z}$

• Si n es impar y positivo y m es par, conservamos un factor seno y lo demás lo expresamos en función del coseno.

Ejemplo:

$$\int sen^3 x\cos^2 xdx = \int sen^2 x\cos^2 xsenxdx =$$
$$= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 xsenxdx =$$
$$= \int (\cos^2 xsenx - \cos^3 xsenx)dx =$$
$$= \int \cos^2 xsenxdx - \int \cos^3 xsenxdx \quad \Rightarrow \quad u = \cos x, \quad du = -senxdx$$

Con esa sustitución tenemos:

$$\int sen^3 x\cos^2 xdx = -\int u^2 du + \int u^3 du =$$
$$-\frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} + k = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^4 x}{4} + k$$

• Si m es impar y positivo y n es par, conservamos un factor coseno y lo demás lo expresamos en función del seno. Resolvemos en forma análoga al ejemplo anterior.

• Si n y m son pares y positivos, usamos repetidas veces las identidades:

$$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$
$$sen^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$
Para convertir el integrando en uno que tenga potencias impares del coseno. Luego se procede como en el caso anterior.

Ejemplo:

$$\int sen^2 x \cos^2 x dx = \int \frac{(1-\cos 2x)}{2}\frac{(1+\cos 2x)}{2} dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 x)dx = \frac{1}{4}\int (1 - \frac{1+\cos 2x}{2})dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 2x dx$$
Integrales que son de resolución inmediata.

2) $\int sen(mx)\cos(nx)dx \quad o \quad \int sen(mx)sen(nx)dx \quad o \quad \int \cos(mx)\cos(nx)dx \quad con \quad n, m \in \mathbb{Z}$

En estos casos se usan las identidades:

$$sen(mx)sen(nx) = \frac{1}{2}\{\ \cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x]\}$$
$$sen(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\{\ sen[(m-n)x] + sen[(m+n)x]\}$$
$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\{\ \cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)x]\}$$

Ejemplo:

$\int sen(5x)sen(3x)dx = \int \frac{1}{2}[sen(2x) + sen(8x)]dx$ que ahora puede resolverse usando el método de sustitución.

Actividades:

23) Hallar las siguientes integrales mediante el método de sustitución:

a) $\int (10.x + 8x^2 + 5)^{10}(10 + 16.x)dx$

b) $\int (4.x^2 + 5.x^6)^3.(8.x + 30.x^5)dx$

c) $\int \frac{24x^2+2x}{8x^3+x^2}dx$

d) $\int \left(\frac{4x^3 - senx - 7^x.\ln 7}{x^4+\cos x - 7^x}\right)dx$

e) $\int \left(\frac{3+e^x}{e^x+3x}\right)dx$

f) $\int \sqrt{x^2-2x^4}dx$ Respuesta:

$-\frac{1}{6}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

g) $\int \sqrt{2+3x}dx$ (Respuesta: $\frac{2}{9}\sqrt{(2+3x)^3}+C$)

h) $\int \cos(7x).7dx$

i) $\int sen(4x^2).8x.dx$

j) $\int sen^{10}x.\cos x.dx$

k) $\int e^{-x}dx$

l) $\int x^2.e^{x^3}dx$

m) $\int \frac{dx}{e^x}$

n) $\int \left(e^{ax}-e^x\right)^2 dx$ (Indicación: Desarrollar el cuadrado, usar la propiedad de linealidad y aplicar sustitución a cada término)

o) $\int e^x.sen(e^x).dx$

p) $\int e^{10.x^6}.x^5.dx$ (Indicación: Multiplicar y dividir por 60)

24) Evaluar $\int_0^{\pi/2} \sqrt{senx}.\cos x.dx$

25) Evaluar $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

26) Hallar el área acotada por $y=\frac{x+5}{x}$, el eje x, $x=1, x=5$

27) Encontrar por método de partes $\int x.\cos x\ dx$ (Respuesta: xsenx + cosx + C)

28) a) Encontrar por sustitución $\int$ cos 3x dx y $\int$ sen 3x dx

b) Hallar $\int$ x. cos 3x dx

c) Verificar lo obtenido por derivación.

29) Encontrar utilizando integración por partes: $\int x^3 \ln x\, dx$

30) Encontrar utilizando integración por partes: $\int x^2.e^x\, dx$ *(Respuesta: $x^2.e^x-2\,x.e^x+2\,e^x+C$)*
Verificar lo obtenido por derivación

31) Encontrar $\int x.\sqrt{x-1}dx$ utilizando método por partes, llevarla a la expresión más simple posible.

(Respuesta: $\frac{2}{15}(x-1)^{\frac{3}{2}}.[3x+2]+C$ *, verificar lo obtenido por derivación)*

32) a) Encontrar $\int$ x. sen x dx
b) Encontrar $\int x^2$. cos x dx (indicación: usar la parte a))

c) Encontrar $\int x^3 . \operatorname{sen} x \, dx$ (indicación: usar la parte b))
(Respuesta: $-x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 6 \operatorname{sen} x + C$)

33) Encontrar $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$
(Indicaciones: $u = \operatorname{sen} x$, $dv = \operatorname{sen} x \, dx$, usar las identidades trigonométricas:
$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y $\operatorname{sen} x . \cos x = (1/2)\operatorname{sen} 2x$