Anillos, cuerpos y álgebras

En esta guía, todos los anillos A son unitarios y $1_A \neq 0_A$.

Ejercicio 1. Sea A un anillo conmutativo. Un ideal $\mathfrak{p}$ de A se dice primo si $\mathfrak{p} \neq A$ y para todo $a, b \in A$ tal que $ab \in \mathfrak{p}$, entonces $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$. Probar que un ideal $\mathfrak{p} \subset A$ es primo si y sólo si $A/\mathfrak{p}$ es un dominio íntegro.

Ejercicio 2. Sea A un anillo conmutativo. Un elemento $c \in A$ se dice *irreducible* si c no es inversible y si $c = ab$, entonces a es inversible o b es inversible. Un elemento p se dice *primo* si p no es inversible y el ideal $\mathfrak{p} = (p) = Ap$ generado por p es un ideal primo.

Suponiendo que A es un dominio íntegro, probar que

(i) Un elemento c es irreducible si y sólo si (c) es un ideal maximal en el conjunto de todos los ideales principales propios.

(ii) Todo elemento primo de A es irreducible.

(iii) Si A es un DIP (dominio de ideales principales), entonces un elemento p es primo si y sólo si es irreducible.

Ejercicio 3. Sea A un anillo conmutativo. Un ideal $\mathfrak{m}$ de A se dice *maximal* si $\mathfrak{m} \neq A$ y para todo ideal $\mathfrak{n}$ de A tal que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n} \subset A$, entonces $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ o $\mathfrak{n} = A$. Probar que un ideal $\mathfrak{m}$ de A es maximal si y sólo si $A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo.

Ejercicio 4. Sea A un dominio íntegro finito. Probar que A es un cuerpo.

Ejercicio 5. Dado $b \in \mathbb{C}$ se define $\mathbb{Q}[b] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i b^i \mid a_i \in \mathbb{Q}\}$. Probar que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, $\mathbb{Q}[i]$ y $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ son cuerpos.

Ejercicio 6. Sea $\Bbbk$ un cuerpo y sea A una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita. Probar que si A es un dominio íntegro, entonces es un cuerpo.

Ejercicio 7. Sea A un anillo conmutativo y E una A-álgebra. Si $m : E \otimes_A E \to E$ denota la multiplicación y $u : A \to E$, $u(a) = a \cdot 1_E$ la unidad, describir usando diagramas conmutativos las relaciones de asociatividad, de conmutatividad y las propiedades que cumple la unidad.