

DIP, DFU y unidades

En esta guía, A es un anillo conmutativo, asociativo con unidad y \mathbb{k} es un cuerpo.

Ejercicio 1. Sean $f, g \in \mathbb{k}[X]$.

- (a) Sea h un factor común de f y g . Mostrar que $(f, g) = h$ si y sólo si f/h y g/h son coprimos.
- (b) Si f divide a h y es coprimo con g , entonces $f|h$.

Ejercicio 2. Determinar el grupo de unidades $\mathcal{U}(A)$ de los siguientes anillos A :

$$\mathbb{Z}, \mathbb{k} \text{ (cuerpo)}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{Z}[\sqrt{-5}], D[X] \text{ con } D \text{ dominio íntegro}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Ejercicio 3. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Probar que:

- (a) -1 es un cuadrado en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si y sólo si $p = 2$ o $p \equiv 1 \pmod{4}$.
- (b) p es irreducible en $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si p no es suma de dos cuadrados (en \mathbb{Z}).
- (c) p es primo en $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si $p \equiv 3 \pmod{4}$.
- (d) p es suma de dos cuadrados (en \mathbb{Z}) si y sólo si $p = 2$ o $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Ejercicio 4. Sea A un dominio íntegro y sea $a \in A$. Probar que:

- (a) Si A es DFU, entonces todo irreducible es primo.
- (b) Dar ejemplos en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ de elementos que sean irreducibles pero no primos.

Ejercicio 5. Sea A un dominio íntegro. Probar que vale que si A es un DIP entonces A es un DFU, pero no la recíproca.

Ejercicio 6. Determinar todos los polinomios irreducibles en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ de grado menor o igual a 6.