Cuerpos de cocientes, irreducibilidad y DFU

En esta guía, A es una anillo conmutativo, asociativo con unidad, K es su cuerpo de cocientes y $\Bbbk$ es un cuerpo.

Ejercicio 1. Caracterizar el cuerpo de cocientes de los siguientes dominios íntegros:

$$\mathbb{Z}[i],\ \mathbb{Z}[\sqrt{2}],\ A[X]\ (A \text{ dominio íntegro}).$$

Ejercicio 2. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Probar que:

(a) $(X+1)^p - 1$ es divisible por X y $\frac{(X+1)^p-1}{X} = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} X^{p-i-1} \in \mathbb{Z}[X]$ es irreducible.
(b) $1 + X + X^2 + \cdots + X^{p-1}$ es irreducible.
(c) $X^n - p$ es irreducible $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3. Sea $\Bbbk$ un cuerpo y sea $f \in \Bbbk[X]$.

(a) Probar que $\Bbbk[X]/(f)$ es un cuerpo si y s ólo si f es irreducible.
(b) Construir un cuerpo de 9 elementos.
(c) Probar que $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{C}$.
(d) Supongamos que $f = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ con los $\alpha_i \in \Bbbk$ todos distintos. Sea $g_j = \prod_{i \neq j}(X - \alpha_i)$, $1 \leq j \leq n$. Probar que $\{g_1, ..., g_n\}$ es base de $\Bbbk[X]/(f)$, y para un $h \in \Bbbk[X]$, calcular las coordenadas de $\bar{h}$ en esa base.

Ejercicio 4. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Definimos $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ mediante la fórmula

$$\varphi(a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0) = \overline{a_n} X^n + \cdots + \overline{a_1} X + \overline{a_0},$$

donde $\overline{a_i}$ es la clase de a_i en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Probar que:

(a) φ es un morfismo de anillos.
(b) Para un $f \in \mathbb{Z}[X]$ tal que $\varphi(f) \neq 0$ y $\mathrm{gr}(\varphi(f)) = \mathrm{gr}(f)$, si $\varphi(f)$ es irreducible en $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$, entonces f no se factoriza en $\mathbb{Z}[X]$ como producto de polinomios de grado positivo.

Ejercicio 5. Sea $\Bbbk$ un cuerpo finito de q elementos. ¿Cuántos polinomios irreducibles mónicos de grado 2 hay en $\Bbbk[X]$? ¿Y de grado 3?

Ejercicio 6. Probar que $X^2 + Y^2 - 1$ y $XT - YZ$ son irreducibles en $\mathbb{Q}[X, Y]$ y $\mathbb{Q}[X, Y, Z, T]$, respectivamente.