Extensiones de cuerpos, polinomios minimales

El polinomio minimal del elemento a sobre el cuerpo K se nota $f(a, K)$.

Ejercicio 1. Considere el polinomio $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Mostrar que f es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. Si a es una raíz real de f y $\mathbb{Q}[a]/\mathbb{Q}$ la extensión asociada al polinomio, escribir el elemento $g(a) = a^4 + 2a + 3$ de $\mathbb{Q}[a]$ en la base $\{1, a, a^2\}$ y hallar su inverso.

Ejercicio 2. Calcular los siguientes polinomios minimales

$$f(\sqrt[4]{5}, \mathbb{Q}), \qquad f(\sqrt[4]{5}, \mathbb{Q}[\sqrt{5}]), \qquad f(\sqrt{2}+\sqrt{3}, \mathbb{Q}), \qquad f(\sqrt{2}+\sqrt{3}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}]).$$

Ejercicio 3. Calcular

$$[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, i] : \mathbb{Q}], \qquad [\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{7}] : \mathbb{Q}], \qquad [\mathbb{Q}\big[\sqrt{2-\sqrt{3}}\big] : \mathbb{Q}].$$

Ejercicio 4.

(a) Calcular $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$ y $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}] : \mathbb{Q}]$. Deducir que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

(b) Hallar $a \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{Q}[a] = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}]$.

Ejercicio 5. Sea E/K una extensión de cuerpos y sean $x, y \in E$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si x e y son trascendentes sobre K entonces $x + y$ o xy es trascendente sobre K.

(b) Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces $x + y$ es trascendente sobre K.

(c) Si x es trascendente e y es algebraico sobre K entonces xy es trascendente sobre K.

(d) Si x es trascendente sobre K e y es trascendente sobre $K(x)$ entonces $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K.

(e) Si x e y son trascendentes sobre K entonces $\{x, y\}$ es algebraicamente independiente sobre K.