Extensiones de cuerpos, grados de extensions, morfismos de cuerpos

El polinomio minimal del elemento a sobre el cuerpo K se nota $f(a, K)$.

Ejercicio 1. Sea K un cuerpo. Probar que son equivalentes

(a) Todo polinomio no constante $f \in K[X]$ se factoriza como producto de polinomios de grado 1.
(b) Todo polinomio no constante $f \in K[X]$ tiene por lo menos una raíz en K.
(c) Los polinomios irreducibles en $K[X]$ son de grado 1.
(d) Toda extensión algebraica de K es de grado 1.

Ejercicio 2. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ primos distintos. Sea $E = \mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}]$.

(a) Probar que $[E : \mathbb{Q}] = 2^n$.
(b) Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$. Calcular el grado $\lambda_1\sqrt{p_1} + \lambda_2\sqrt{p_2} + \cdots + \lambda_n\sqrt{p_n}$ sobre $\mathbb{Q}$.
(c) Caracterizar las subextensiones de $E/\mathbb{Q}$.

Ejercicio 3. Sea E/K una extensión finita y sean L_1 y L_2 subextensiones. Probar que:

(a) Si $[L_1 : K]$ y $[L_2 : K]$ son coprimos, entonces $[L_1L_2 : K] = [L_1 : K][L_2 : K]$.
(b) Si $[L_1L_2 : K] = [L_1 : K][L_2 : K]$ entonces $L_1 \cap L_2 = K$. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 4. Aquí ξ_n denota una raíz n-ésima primitiva de la unidad.

(a) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Calcular $f(\xi_p, \mathbb{Q})$ y deducir $[\mathbb{Q}[\xi_p] : \mathbb{Q}]$.
(b) Calcular $f(\xi_6, \mathbb{Q})$.

Ejercicio 5.

(a) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Probar que hay sólo dos morfismos de cuerpos $f : \mathbb{Q}[\sqrt{d}] \to \mathbb{C}]$ y que en cada caso $f(\mathbb{Q}[\sqrt{d}]) \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.
(b) Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cubos.
  (i) Probar que hay sólo tres morfismos de cuerpos $f : Q[\sqrt[3]{d}] \to \mathbb{C}$ pero en general $f(\mathbb{Q}[\sqrt{d}]) \not\subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$
  (ii) Considerar $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{d}, \xi_3]$. ¿Qué sucede en este caso?