Extensiones de cuerpos, grados de extensions, grupos de Galois

Ejercicio 1. Sean ω una raíz n-ésima primitiva compleja de la unidad, y $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función de Euler dada por $\varphi(n) = |\{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i < n, (n, i) = 1\}|$. Probar que $[\mathbb{Q}[\omega] : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.

Ejercicio 2. Sea $E = \mathbb{Q}[\sqrt[4]{7} + \sqrt{2}]$.
(a) Probar que $E/\mathbb{Q}$ no es normal.
(b) Calcular $[E : \mathbb{Q}]$.
(c) Caracterizar $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

Ejercicio 3. Sea $f(x) = x^4 - 5x^2 + 5 \in \mathbb{Q}[X]$.
(a) Hallar el cuerpo de descomposición E de f.
(b) Calcular $[E : \mathbb{Q}]$.
(c) Caracterizar $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

Ejercicio 4. Caracterizar los cuerpos de descomposición de los polinomios $X^3 + 2X + 1$ y $X^3 + X^2 + X + 2$ sobre $\mathbb{F}_3$. Probar que son isomorfos como extensiones de $\mathbb{F}_3$.

Ejercicio 5. Sea E/K una extensión que es el cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in K[X]$, con $\mathrm{gr}(f) = n$. Probar que $[E : K] | n!$. Mostrar ejemplos donde se cumpla la igualdad y donde no se cumpla.