Extensiones de Galois

Ejercicio 1. Sea ω una raíz 8-ésima primitiva compleja de la unidad. Calcular $[\mathbb{Q}[\omega], \mathbb{Q}]$ y caracterizar $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}[\omega]/\mathbb{Q})$ y todas las subextensiones $\mathbb{Q} \subseteq F \subseteq \mathbb{Q}[\omega]$.

Ejercicio 2. Sea $f = X^4 + 2$. Calcular su cuerpo de descomposición E sobre $\mathbb{Q}$, el grado $[E; \mathbb{Q}]$ de la extensión y caracterizar $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$.

Ejercicio 3. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo y E/K una extensión de Galois de grado $p^n s$ con $n, s \in \mathbb{N}$ y $p \nmid s$. Probar que:

(a) E/K tiene subextensiones de grado s y todas ellas son isomorfas.

(b) Si $p > s$ entonces hay una única subextensión de grado s, que además, resulta ser normal.

Ejercicio 4. Sean K un cuerpo con $\mathrm{car}(K) \neq 2$ y E/K una extensión de Galois tal que $\mathrm{Gal}(E/K) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Probar que $E = K[a, b]$ con $a^2, b^2 \in K$.

Ejercicio 5. Sea E/K una extensión de Galois de grado 15. Probar que E/K tiene sólo dos subextensiones propias. Calcular sus grados y ver que dichas subextensiones son normales.