Grupos lineales cerrados

Ejercicio 1. Sea G un grupo continuo.

(a) Si L un subgrupo de G, muestre que con la topología inducida y con la inclusión de conjuntos $\iota : L \to G$, (L, ι) es un subgrupo continuo. Si además L es normal, muestre que G/L con la topología cociente es un grupo continuo.

(b) Si G es Hausdorff y L es normal, muestre que G/L es Hausdorff si y sólo si L es cerrado en G.

(c) Si G_0 es la componente conexa de la identidad de G, muestre que es un subgrupo normal, y que la topología de G/G_0 es la discreta, es decir, todo subconjunto de G/G_0 es abierto (y a la vez cerrado).

Ejercicio 2. Probar que $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ es suryectiva. Para ello, podemos seguir los siguientes pasos:

(a) Recordar que la serie logarítmica es:

$$\log x = -\sum_{k \geq 1} \frac{(1-x)^k}{k}.$$

Utilizar dicha serie para probar que, si N es una matriz tal que $(I - N)^k = 0$ para algún $k > 0$, entonces existe T tal que $e^T = N$.

(b) Sea A una matriz elemental de Jordan asociada a $\lambda \in \mathbb{C}$. Escribir a A como $A = \lambda \,\mathrm{id} \cdot N$, donde N es una matriz cuya diagonal tiene 1's y satisface las condiciones de (a). Probar que existen matrices B, C tales que $\lambda \,\mathrm{id} = e^B$, $N = e^C$, y $BC = CB$.

(c) Probar que si $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ es la suma directa de matrices $A_i \in \mathfrak{gl}(n_i, \mathbb{C})$, con $\sum_i n_i = n$, entonces e^A es la suma directa de las matrices e^{A_i} .

(d) Deducir la suryectividad de exp a partir del hecho que $e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$, para cada matriz B invertible.

Ejercicio 3. Sabemos que si $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ son tales que $AB = BA$, entonces $e^{A+B} = e^A e^B$.

(a) Hallar $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ tales que $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

(a) Probar que no existe $A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ tal que $e^A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Concluir que $\exp : \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ no es suryectiva.

Ejercicio 4. Describir el álgebra de Lie lineal correspondiente al subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ dado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & z \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0, z \in \mathbb{C} \right\}.$$