Grupos lineales cerrados

Ejercicio 1. Mostrar que el grupo simétrico $\mathbb{S}_n$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Concluir que todo subgrupo finito es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2. Calcular las dimensiones de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R}), \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}), \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n), \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ y $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$.

Ejercicio 3. Verificar que los siguientes son morfismos de grupos de Lie.

$$\varphi_1 : S^1 \to \mathrm{SU}(2), \qquad e^{it} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & cos(t) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2 : S^1 \to \mathrm{SU}(2), \qquad e^{it} \mapsto \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3 : \mathrm{GL}(n,\Bbbk) \to \mathrm{SL}(n+1,\Bbbk), \qquad A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (\det A)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\varphi_4 : \mathrm{GL}(n,\Bbbk) \to \mathrm{Sp}(n,\Bbbk), \qquad A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^t)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Más aún, probar que φ_1 y φ_2 son isomorfismos de grupos de Lie.

Ejercicio 4. La esfera unitaria S^n en $\mathbb{R}^{n+1}$ tiene una estructura de variedad suave de simensión n. La proyección con respecto al **polo norte** está definida en el abierto $U_1 = S^n - \{(0,\dots,0,1\}$ y está dada por

$$\varphi_N(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\dots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right).$$

La proyección con respecto al **polo sur** está definida en el abierto $U_2 = S^n - \{(0,\dots,0,-1\}$ y está dada por

$$\varphi_S(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}},\dots,\frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right).$$

Probar que ambas cartas son suaves y compatibles.

Ejercicio 5. El subgrupo lineal cerrado $\mathrm{SU}(2)$ se puede identificar con la esfera S^3 de $\mathbb{R}^4$ vía

$$\mathrm{SU}(2) \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : \ a,b \in \mathbb{C}, \ |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Así, $\mathrm{SU}(2)$ tiene dos estructuras de variedad suave, una proveniente del ejercicio anterior y otra por ser un subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Probar que estas dos estructuras son la misma.