Álgebras de Lie

Ejercicio 1. Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos de Lie entre dos grupos lineales cerrados, y sea $df : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ el correspondiente morfismo entre sus álgebras de Lie. Probar que

(a) Si df es suryectiva, entonces f es suryectiva en G_0.
(b) Si df es inyectiva, entonces f es inyectiva en un entorno de 1 en G.
(c) Si df es biyectiva, entonces f es un isomorfismo local en G_0.

Ejercicio 2. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Probar que si $\dim(\mathfrak{g}) = 2$, la identidad de Jacobi se obtiene inmediatamente de la condición de antisimetría.

Ejercicio 3. Probar que el miembro izquierdo de Jacobi es igual a un medio de la suma alternada, es decir, si denotamos por $J(x, y, z)$ al miembro izquierdo de Jacobi, entonces

$$J(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_3} (-1)^{\operatorname{sg} \sigma} [x_{\sigma(1)}, [x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]].$$

Ejercicio 4. Probar que un isomorfismo de álgebras de Lie es un homomorfismo de álgebras de Lie que es a la vez un isomorfismo lineal, es decir, que la inversa de un morfismo de Lie es automáticamente de Lie.

Ejercicio 5. Probar que un espacio vectorial de dimensión 2 con base $\{x, y\}$ con el corchete determinado por $[x, y] = y$ es efectivamente un álgebra de Lie. Muestre que toda álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2 es isomorfa a ésta.