Producto Tensorial sobre anillos

Ejercicio 1. Sean $R = \mathbb{Z}$ y A un grupo abeliano. Entonces para todo $m > 0$ se tiene que $A \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \simeq A/mA$.

Ejercicio 2. Sean R un anillo con unidad, I un ideal a derecha de R y B un R-módulo a izquierda. Entonces existe un isomorfismos de grupos $R/I \otimes_R B \simeq B/IB$, donde IB es el subgrupo de B generado por todos los elementos de la forma rb con $r \in R$, $b \in B$.

Ejercicio 3. Sean $R = \mathbb{Z}$, A un grupo abeliano de torsión y $\mathbb{Q}$ el grupo (aditivo) de los racionales. Probar que

(a) $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.
(b) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$.

Ejercicio 4. Sea A un anillo conmutativo con unidad y sean M, N, P tres A-módulos. Probar que se tienen los siguientes isomorfismos de A-módulos:

(a) $M \otimes_A N \simeq N \otimes_A M$.
(b) $(M \otimes_A N) \otimes_A P \simeq M \otimes_A (N \otimes_A P)$. En ese caso denotamos simplemente $M \otimes_A N \otimes_A P$.
(c) $(M \oplus N) \otimes_A P \simeq (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P)$.
(d) $A \otimes_A M \simeq M$.

Ejercicio 5. Sean A, B dos anillos conmutativos con unidad, M un A-módulo, P un B-módulo y N un (A, B)-módulo, es decir, un A-módulo (a izq.) y un B-módulo (a der.) tal que $(a \cdot n) \cdot b = a \cdot (n \cdot b)$ para todo $n \in N$, $a \in A$, $b \in B$. Probar que $M \otimes_A N$ es un B-módulo, $N \otimes_B P$ es un B-módulo y se tiene que

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \simeq M \otimes_A (N \otimes_B P).$$