ÁLGEBRA (Ciencias) – año 2017

PRÁCTICA N°

Funciones

1. ¿Cuáles de estas relaciones son función?

   a) Sea $E = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{R}$ la relación definida en $\mathcal{P}$(E) por:

      i) $A\mathcal{R}B \iff A \cap B = \emptyset$.

      ii) $A\mathcal{R}B \iff A \cap B \neq \emptyset$.

   b) En $\mathbb{N}$ la relación: $x\mathcal{R}y \iff y \leq x$.
   Sea $A = \{2, 20, 200\}$. Determinar la imagen de A por la relación $\mathcal{R}$. Hallar $\mathcal{R}^{-1}(A)$.

   c) En $\mathbb{N}$ la relación: $x\mathcal{R}y \iff x + 2y = 40$.

   d) $\mathcal{R}$ definida en el conjunto de rectas del plano, como: $a\mathcal{R}b \iff a \cap b \neq \emptyset$.

2. Si $f : A \to B$, donde $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ y $f(x) = x^2 - 1$. Determinar:

(a) $f(0)$	(b) $f(-1)$	(c) $f(-2)$
(d) $f(\{-1, 1\})$	(e) $f(A)$	(f) $f(\{-1, 0, 1\})$
(g) $f^{-1}(\{-2, 2\})$	(h) $f^{-1}(\{-1, 3\})$	(i) $f^{-1}(\{0, -1, 3\})$

3. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

   Hallar $f^{-1}(B)$, siendo:
   a) $B = \{4\}$, b) $B = \{4, 5\}$, c) $B = (-\infty, 0]$, d) $B = (0, 4] \cup \{5\}$, e) ¿Hay algún subconjunto B tal que $f^{-1}(B) = \emptyset$?

4. Sea $f : A \to B$ una función. Sean $X \subset A$ e $Y \subset A$, probar:

   a) $Y \subset X \Longrightarrow f(Y) \subset f(X)$

   b) $f(X) - f(Y) \subset f(X - Y)$

   c) $X \subset f^{-1}(f(X))$

5. Sea $f : A \to B$ una función y $X \subset B$. Establecer si son verdaderas o falsas. (Justificar)

   a) $X = \emptyset \Longrightarrow f^{-1}(X) = \emptyset$

   b) $f^{-1}(X) = \emptyset \Longrightarrow X = \emptyset$

6. Sea $f : A \to B$ una función, sean $Z \subset B$ e $Y \subset B$. Probar:

$$Z \subset Y \Longrightarrow f^{-1}(Z) \subset f^{-1}(Y)$$

7. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por: $f(x) = |x|$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por: $g(x) = x^2 - 3x$.
   Hallar:
   a) $g \circ f$ Es $g \circ f = f \circ g$?
   b) $g \circ g = g^2$ y $f \circ f = f^2$
   c) $(g \circ f)(-1)$

8. a) Analizar la inyectividad y suryectividad de las siguientes funciones:
      1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x + 1$
      2) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 3x + 4$
      3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2$
      4) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x, y) = x^2 + 2y$
      5) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x, y) = xy$
      6) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2}, & x \text{ es impar} \\ \frac{-x}{2}, & x \text{ es par.} \end{cases}$
   b) Sea E un conjunto y A un subconjunto propio de E (A es un subconjunto propio de E si $A \subset E$, $A \neq E$ y $A \neq \emptyset$). Analice inyectividad y suryectividad de las siguientes funciones:
      1) $f : P(E) \to P(E)$ dada por $f(X) = X^c$ (el complemento respecto del conjunto E).
      2) $g : P(E) \to P(E)$ dada por $g(X) = A \cap X$.
      3) $h : P(E) \to P(E)$ dada por $h(X) = A \cup X$.

9. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Demostrar:
   a) Si $(g \circ f)$ es inyectiva entonces f es inyectiva.
   b) Si f y g son suryectivas entonces $(g \circ f)$ es suryectiva.
   c) Si $(g \circ f)$ es suryectiva entonces g es suryectiva.
   d) Si f y g son inyectivas entonces $(g \circ f)$ es inyectiva.

   Si f y g son biyectivas, ¿es $(g \circ f)$ biyectiva? y si $(g \circ f)$ es biyectiva, ¿son f y g biyectivas?

   ==============Optativos==

10. Probar que $\mathbb{N}$ es coordinable con $\mathbb{Z}$.

11. Sean $a < b \leq c < d$ reales cualesquiera. Hallar una biyección entre el intervalo $[a, b]$ y el intervalo $[c, d]$

12. Probar que el intervalo real $[0, 1]$ es coordinable con el intervalo $(0, 1)$.

13. Hallar una biyección entre los números reales y el intervalo real $(-1, 1)$.