ÁLGEBRA (Ciencias) – año 2017

PRÁCTICA 2

Conjuntos. Parte I

1. Definir los siguientes conjuntos por extensión:

   a) $\{x : \ x$ es un día de la semana$\}$

   b) $\{k : \ k \in \mathbb{Z} \wedge \ -5 < k < 10\}$

2. Definir los siguientes conjuntos por comprensión:

   a) El de los enteros impares.

   b) El que tiene como elementos las siguientes letras: u, i, o, e, a.

3. Definir de distintas maneras los siguientes conjuntos:

   a) $\mathrm{A} = \{x : \ x \in \mathbb{R} \wedge x = 2x\}$

   b) $\mathrm{B} = \emptyset$

   c) $\mathrm{C} = \{0\}$

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos es el conjunto vacío?

   a) $\mathrm{A} = \{x : \ x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 1 = 0\}$

   b) $\mathrm{B} = \{x : \ x = -x \ \wedge \ x \in \mathbb{R}\}$

   c) $\mathrm{C} = \{\emptyset\}$

   d) $\mathrm{D} = \emptyset$

   e) $\mathrm{E} = \{x : \ x^2 = 9 \ \wedge \ 2x = 4 \ \wedge \ x \in \mathbb{R}\}$

   f) $\mathrm{F} = \{y : \ y > 2 \ \wedge \ y < 2\}$

5. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

   a) $\mathrm{A} = \{x : \ x$ es un dígito del número $123123\}$

   b) $\mathrm{B} = \{x : \ x \in \mathbb{Z} \wedge 1 < x < 3\}$

   c) $\mathrm{C} = \{\emptyset\}$

   d) $\mathrm{D} = \emptyset$

   e) $\mathrm{E} = \{x : \ x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq x \leq 3\}$

   f) $\mathrm{F} = \{x : \ x \in \mathbb{Q} \wedge 1 < x < 3\}$

   g) $\mathrm{G} = \{x : \ x - 2 = 0 \ \wedge \ x \in \mathbb{R}\}$

6. Sea $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}, -1\}$, decir si son verdaderas o falsas las siguientes relaciones. Justifique.

a) $3 \in A$	b) $\{1, 2\} \subseteq A$	c) $\{1, 2\} \in A$
d) $\{3\} \subseteq A$	e) $\{\{3\}\} \subseteq A$	f) $\emptyset \in A$
g) $\{-1, 2\} \subseteq A$	h) $\emptyset \subseteq A$	i) $\{1, 2, -1\} \in A$

7. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos

   a) $A = \{1, 2, \sqrt{9}\}$ $B = \{1, 2, -3, \{3\}\}$

   b) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| \leq 1\}$

   c) $A = \{1, 2, \sqrt{9}\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

   d) $A = \{\emptyset\}$ $B = \emptyset$

   e) $A = \{x \in \mathbb{Z} : \text{-1} \leq \text{x} \leq 1\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} : \text{x}^3 - \text{x} = 0\}$

8. Sean $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 7\}$ y $C = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 21\}$. Probar que:

   a) $C \subset A$ y $A \neq C$

   b) $C \subset B$ y $B \neq C$

   c) $C \subset A \cap B$.

9. Sean: $A = \{1, 3, \sqrt{4}\}$; $B = \{3, 4, 1^3, b\}$; $C = \{0, b, 2, 3\}$. Hallar: $A \cup B$, $B \cup C$, $C \cup A$, $A \cup (C \cup B)$, $(A \cup B) \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$, $(A \cap B) \cap C$ y $A \cap (B \cap C)$.

10. Hallar la unión en los siguientes casos:

    a) $\{x : x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq x \leq 8\}$; $\{x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \leq x \leq 3\}$

    b) $\{x : x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x < 8\}$; $\{x : x \in \mathbb{N} \wedge 8 < x \leq 12\}$

11. Hallar la intersección de los conjuntos A y B, en los siguientes casos:

    a) $A = \{x\text{: } x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \leq 6\}$, $B = \{y\text{: } y \in \mathbb{N} \wedge 0 < y \leq 10\}$

    b) $A = \{x\text{: } -1 < x \leq 1/4 \wedge x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{z : -1 < z < 0 \vee 0 < z < 3,\ z \in \mathbb{R}\}$

12. Probar:

    a) $\emptyset \cup A = A$.

    b) $A \subset A \cup B$.

    c) $A \cap \emptyset = \emptyset$.

    d) $A \cap B \subset A$

    e) $A \cap A = A$

13. Probar (usando el contrarrecíproco):

a) Sea P el conjunto de los números enteros pares.

$x^2 \in P \Longrightarrow x \in P$.

b) $A \cup B = \emptyset \Longrightarrow (A = \emptyset \wedge B = \emptyset)$.

14. Probar (usando el método de reducción al absurdo):

a) Sean $C = \{0\}$, a y b números reales.

$a.b \in C \Longrightarrow (a \in C \vee b \in C)$.

b) $A \cup B = \emptyset \Longrightarrow (A = \emptyset \wedge B = \emptyset)$.

15. Probar (usando el método directo):

a) Sean $C = \{x \in \mathbb{R} |\ x^8 - x^2 = 0\ \}$ y $D = \{x \in \mathbb{R} |\ x^4 - x = 0\ \}$

$x \in C \Longrightarrow x^2 \in D$.

b) $(A \neq \emptyset \vee B \neq \emptyset) \Longrightarrow A \cup B \neq \emptyset$.

16. Siendo A, B y C conjuntos, demostrar que:

a) Si $A \subset B$ y $B \subset C$ y $C \subset A$ entonces $A = B = C$.

b) Si $X \subset \emptyset$ entonces $X = \emptyset$.

c) $(C \subset A$ y $C \subset B) \Longrightarrow C \subset A \cap B$.

17. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

a) $\emptyset \in A$ entonces $A \neq \emptyset$

b) $\emptyset \subset A$ entonces $A \neq \emptyset$

c) Si $A \cap B = A \cap C$ entonces $B = C$

d) Si $A \cup B = A \cup C$ entonces $B = C$.

Ejercicios optativos

18. Sean, para cada natural n, los conjuntos $A_n = \{x\colon x \in \mathbb{R} \wedge\ x \geq n\}$, $B_n = \{x\colon x \in \mathbb{R} \wedge\ x \leq n\}$. Determinar

a) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ b) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ c) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n - B_n)$ d) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{n=8} B_n$

19. Determinar

a) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+2)$

b) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, 2n]$

Considerar intervalos reales y luego intervalos naturales.