ÁLGEBRA (Ciencias) – año 2017

PRÁCTICA N° 4

Números Naturales

1. Escribir los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones:

   a) $a_n = n^4 - 5n \qquad n = 1, 2, \cdots$

   b) $b_n = (-1)^{n+1} \cdot 3^n \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$

   c) $b_j = x^j \cdot y^{-(j+1)} \qquad j = 1, 2, \cdots \qquad x,\ y$ fijos.

   d) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_m = (-2) \cdot a_{m-1} + a_{m-2} \qquad m = 3, 4, \cdots$

2. Para los siguientes casos determinar una fórmula general para a_n e indicar a partir de qué valor de n tiene validez.

   a) $2, 4, 8, 16, \cdots$

   b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$

   c) $2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, \cdots$

   d) $-2, 4, -6, 8, -10, \cdots$

   e) $\frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \cdots$

   f) $3, 5, 9, 17, 33, 65, \cdots$

3. Dada la siguiente sucesión: $7, 10, 13, 16, 19, \cdots$ ¿Cómo es la diferencia de dos términos consecutivos?

   A estas sucesiones se las llama ARITMETICAS, porque la diferencia entre dos términos consecutivos es constante. En general si $\{\ a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $n \geq 1$, es aritmética, dado el primer término a_1 resulta que $a_n = a_{n-1} + d, \quad \forall\, n \geq 2$, donde d es la diferencia.

   a) Encuentra una definición explícita para la sucesión aritmética dada.

   b) Encuentra una definición explícita para una sucesión aritmética cualquiera.

4. Dada la siguiente sucesión: $3, 6, 12, 24, 48, 96, \cdots$ ¿Cómo es el cociente entre dos términos consecutivos?

   A estas sucesiones se las llama GEOMETRICAS, porque el cociente entre dos términos consecutivos es constante. En general si $\{\ a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $n \geq 1$, es geométrica, dado el primer término a_1 resulta que $a_n = a_{n-1} \cdot r, \quad \forall\, n \geq 2$, donde r es la razón.

   a) Encuentra una definición explícita para la sucesión geométrica dada.

   b) Encuentra una definición explícita para una sucesión geométrica cualquiera.

5. El séptimo término de una sucesión aritmética es 79 y el decimotercero es 150. Encontrar el primer término y la diferencia.

6. Una pelota de ping pong se lanza desde una altura de 15 mts. En cada rebote se eleva verticalmente $\frac{1}{4}$ de la altura alcanzada por el rebote previo. ¿A que altura se elevará en el octavo? ¿Y en el n-ésimo?

7. Si $a_s = \dfrac{2s+1}{3s+1}$ para $s = -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$

   a) Definir h_i para $i = -1, 0, 1, 2, \cdots$, de modo que: $h_{-1} = a_{-2}$, $h_0 = a_{-1}$, $h_1 = a_0$, etc.

   b) ¿Cómo definiría c_k para $k = 1, 2, 3, \cdots$ de modo que: $c_1 = a_{-2}$, $c_2 = a_{-1}$, $c_3 = a_0, \cdots$?

8. Desarrollar las siguientes sumatorias:

   a) $\displaystyle\sum_{j=4}^{7} \left(\frac{(j)^{j-1}}{(j-1)^{j+1}} \right)^{-1}$

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k \cdot b_k$

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (8+k)$

   d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 8+k$

9. Expresar usando el símbolo de sumatoria.

   a) $\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{16}$

   b) $1 - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{27} - \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{125}$

   c) $a^4\, b^0 + a^3\, b^1 + a^2\, b^2 + a^1\, b^3 + a^0\, b^4$

10. Desarrolar los siguientes productos.

    a) $\displaystyle\prod_{j=1}^{5} (-1)^j\, (j+1)$

    b) $\displaystyle\prod_{j=2}^{4} a^j\, (b+j)$

    c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{4} -2$

11. Expresar usando el símbolo de productoria.

    a) $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{1}{15} \cdot \dfrac{1}{21}$

    b) $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdots b_h$ $\qquad$ h factores.

    c) $\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{8}{15} \cdot \dfrac{10}{20} \cdots$ $\qquad$ n factores.

12. Expresar cambiando la variación de los subíndices y consecuentemente el término general para que valgan las siguientes igualdades.

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} 2^i \cdot [3 \cdot (i+2) - 7i] = \sum_{j=2}^{\cdots} \cdots$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=6}^{\cdots} \cdots = \sum_{s=2}^{\cdots} \cdots = \sum_{h=R}^{\cdots} \cdots \qquad R$ constante.

13. Desarrollar:

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{2} \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b^j \right)$

b) $\displaystyle\sum_{j,i=0}^{4} (-1)^i \cdot \left(\frac{3}{5} \right)^j$

c) $\displaystyle\sum_{0 \leq i+j \leq 2} 2i \cdot [j+1]$

14. Calcular:

(a) $\dfrac{7!}{4! \cdot 2!}$ (b) $4! + 2!$ (c) $(4+2)!$

(d) $(2^2)!$ (e) $(2!)^2$ (f) $6! - 5!$

Notar que $a! + b! \neq (a+b)!$ y que $(a^b)! \neq a!^b$. ¿ Es $(a-b)!$ igual a $a! - b!$?

15. Calcular y/o simplificar:

(a) $n! - (n-2)! \qquad (n \geq 2)$ (b) $8(n-1)! - 2n! \qquad (n \geq 1)$

(c) $\dfrac{n!}{(n-3)! \cdot n} \qquad (n \geq 3)$ (d) $\dfrac{(2n-2)! \cdot (n-2)!}{n!(2n-3)!} \qquad (n \geq 2)$

16. Expresar utilizando los factoriales convenientes $(m, n, k \in \mathbb{N} \wedge r \geq 1 \wedge k \geq 1)$

(a) $10 \cdot 9 \cdot 8$ (b) $(r+2)(r+1)r(r-1)$

(c) $k^2(k^2-1)$ (d) $2m(2m-2)(2m-4)(2m-6) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2$

17. Hallar n, si es que existe, que verifique:

(a) $\dfrac{n!}{(n-1)!} = 21$ (b) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 15$ (c) $\dfrac{n! - (n-1)!}{(n-2)!} = 49$

18. Demostrar aplicando el principio de inducción:

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n} \qquad \forall n \geq 1$

b) $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2} \right]^2 \qquad \forall n \geq 1$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^{i-1} = 1 + (n-1) \cdot 2^n \quad \forall\, n \geq 1$

d) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{-1}{4i^2-1} = \frac{n+1}{2n+1} \quad \forall\, n \geq 0$

e) $1 + 2 + 3 + \cdot + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad \forall\, n \geq 1$

f) Probar que si a_n es una sucesión geométrica definida recursivamente por: a_1 y $a_n = a_{n-1}.r$, $\forall\, n \geq 2$ entonces el término explícito es $a_n = a_1.r^{n-1} \quad \forall\, n \geq 1$

g) Suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica:

$$\sum_{i=1}^{n} a \cdot R^{i-1} = a \cdot \frac{(R^n - 1)}{R-1} \qquad \forall\, n \geq 1 \qquad R \neq 1$$

h) Probar que si a_n es una sucesión aritmética definida recursivamente por: a_1 y $a_n = a_{n-1} + d$, $\forall\, n \geq 2$ entonces el término explícito es $a_n = a_1 + (n-1)d \quad \forall\, n \geq 1$

i) Suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética:

$$\sum_{i=1}^{n} (a + (i-1)d) = \frac{n \cdot [2a + (n-1)d]}{2} \qquad \forall\, n \geq 1$$

j) $\displaystyle\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{n}$

k) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1 \quad \forall\, n \geq 1$

l) $\displaystyle x^n - y^n = (x-y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} \cdot y^k \quad \forall\, n \geq 1$

m) Ejercicio optativo: $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{n+i}{2i-3}\right) = 2^n(1-2n) \quad \forall\, n \geq 1$

19. Calcular utilizando propiedades de la suma y los resultados del ejercicio anterior:

a) $\displaystyle\sum_{i=8}^{48} \frac{1}{2^i}$

b) $\displaystyle\sum_{j=40}^{78} j \cdot 2^j$

c) $\displaystyle\sum_{k=10}^{40} (8 + 7k)$

d) $\displaystyle\sum_{t=0}^{h} 9 \cdot 4^{t+1}$

e) La suma de los 70 primeros impares

f) La suma de los 90 primeros pares

g) Un mendigo le propuso a un avaro :"Durante este mes le daré a usted 1 peso el primer día, 2 pesos el segundo, 3 pesos el tercero y así sucesivamente. A cambio usted me dará $\frac{1}{1000}$ el primer día, $\frac{2}{1000}$ el segundo, $\frac{4}{1000}$ el tercero, $\frac{8}{1000}$ el cuarto, y así sucesivamente". El avaro aceptó entusiasmado y convinieron en hacer el pago a fin de mes. Quién de los dos se quedó con más dinero?

20. Probar las siguientes desigualdades utilizando el principio de inducción.

a) $(m+1)! \geq 2 \cdot m! \qquad \forall m \geq 1$

b) $6^n \geq 1 + 4^n \quad \forall n \geq 1$

c) $3^n \geq 3n \quad \forall n \geq 1$

d) $8^n \geq 1 + 5^n \quad \forall n \geq 1$

e) $2^n < n! \quad \forall n \geq 4$

f) Ejercicio optativo: $3n^2 \geq 2n + 1 \quad \forall n \geq 1$

g) Ejercicio optativo: $2^n > 2n + 1 \quad \forall n \geq 3$

21. Probar por Inducción Completa

a) Sea a_n una sucesión de números naturales tales que $a_1 = 18, a_2 = 170$ y se verifica la siguiente relación : $a_n = 18a_{n-1} - 77a_{n-2} \quad \forall n \geq 3$
Probar que $a_n = 7^n + 11^n \quad \forall n \geq 1$

b) Sea a_n una sucesión de números naturales tales que $a_1 = 0, a_2 = 3$ y se verifica la siguiente relación : $a_n = 9a_{n-2} \quad \forall n \geq 3$
Probar que $a_n = \frac{3^n + (-3)^n}{6} \quad \forall n \geq 1$

c) Dada la sucesión de Fibonacci, definida recursivamente por $a_1 = 1, a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $\forall n \geq 3$
Probar que $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \forall n \geq 1$

22. Dado el siguiente esquema , $P(n) : n^2 + 5n + 1$ es par .

a) Probar que si $P(k)$ es verdadera para algún k natural, entonces $P(k+1)$ también lo es.

b) Considerando el principio de Inducción Completa, puede decirse que $P(n)$ es verdadera para todo natural?

c) Probar que $P(n)$ es falsa para todo n natural.