ÁLGEBRA (Ciencias) – año 2017

PRÁCTICA N° 6

Números Enteros

1. Determinar en cuales de los siguientes subconjuntos la suma o el producto de $\mathbb{R}$ son operaciones cerradas.
   $A_1 = \{2k + 3t : \ k \in \mathbb{Z} \wedge t \in \mathbb{Z}\}$ $\qquad$ $A_2 = \{(-1)^n : \ n \in \mathbb{N}\}$
   $A_3 = \{2^n : \ n \in \mathbb{N}\}$ $\qquad$ $A_4 = \{5k + 1 : \ k \in \mathbb{Z}\}$

2. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Analizar la validez de:

   a) Si $a|b \cdot c \Longrightarrow a|b$ ó $a|c$

   b) Si $a|(c + b) \Longrightarrow a|b$ ó $a|c$

   c) Si $a|b$ y $c|b \Longrightarrow a \cdot c|b$

3. Sean n y m números naturales, $m \neq 0$. Probar: n es par si y sólo si n^m es par.

4. Si $n \in \mathbb{Z}$, determinar si son o no par los siguientes números: $3n^2 + 1,\ n(n + 1),\ n^3 - n$.

5. Dados los enteros a y b, hallar el cociente q y el resto r, tales que cumplan que $a = b \cdot q + r$, con $0 \leq r < |b|$

   (a) $a = 135$ $\quad b = 14$ $\qquad$ (b) $a = -1234$ $\quad b = 234$
   (c) $a = -1245$ $\quad b = -546$ $\qquad$ (d) $a = 1001$ $\quad b = -111$

6. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Si $a - b = 175$ y la división de a por b tiene cociente 13 y resto 7, Hallar a y b.

7. Hallar el resto de dividir x por 42 en los siguientes casos: ($a \in \mathbb{N}$)
   1)$x = a\ 42 + 86$ $\quad$ 3)$x = a\ 42 - 61$
   3)$x = a\ 42 + 11$ $\quad$ 4)$x = a\ 42 - 10$

8. Sean a y b dos números enteros que tienen restos 5 y 8, respectivamente, en la división por 13. Hallar los restos de la división por 13 de los siguientes enteros:

   a) $5a - 4b$

   b) $a + b^2$

   c) $(26b^2 - 39a^2)^{50}$

9. Probar que si m es una combinación lineal entera de a y b, es decir que existen enteros k y q tales que $m = ak + bq$, entonces $(a, b)|m$.

10. *a*) Si a un número se lo divide por 4, el resto es 2 y si se lo divide por 3, su resto es 1. ¿Cuál es el resto si se lo divide por 12?

    b) El resto de la división de un número por 7 es 2; si se lo divide por 3, su resto es 1. ¿Cuál es el resto si se lo divide por 21?

11. Probar por inducción:

    a) $7^n - 1$ es divisible por 6, $\forall n, n \in \mathbb{N}$

    b) $n^2 + n$ es divisible por 2, $\forall n, n \in \mathbb{N}$

    c) $10^{n+1} + 10^n + 1$ es divisible por 3, $\forall n, n \in \mathbb{N}$

d) El polinomio $x^n - a^n$ es divisible por $x^3 - a^3$, $\forall n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1, n$ múltiplo de 3.

12. Calcular (a, p), para a un entero cualquiera y p primo.

13. Sea p un número primo. Probar que para todo natural n, si p divide al producto de n números enteros entonces p divide a alguno de ellos.

14. Determinar cuáles de los siguientes enteros son primos: 91, 307, 1001.

15. Calcular (a, b) y expresarlo como combinación lineal de a y b, siendo:

(a) $a = 47$	$b = 10$
(b) $a = 352$	$b = 16$
(c) $a = 12001$	$b = -12002$

16. Sean a y $b \in \mathbb{Z}$. Calcular:

    a) $(a + 1, a)$

    b) $(a, a \cdot b + 1)$

17. Calcular $(2^n - 7^n, 2^n + 7^n)$.

18. Calcular $[a, b]$ en los siguientes casos:

(a) $a = 1$	$b = 384$
(b) $a = 4$	$b = -4$
(c) $a = 284$	$b = -13$

19. Encontrar todos los números enteros a y b que verifican:
    $(a, b) = 54$
    $[a, b] = 810$

20. Determinar los enteros n tales que $[n, 130] = 260$

21. Determinar enteros a y b tales que $(a, b) = 10$ y $[a, b] = 1500$.

22. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, demostrar:

    a) Si $(a, b) = 1 \Longrightarrow (a, a + b) = 1$

    b) Si $a|b\,c \ \wedge \ (a, b) = 1 \Longrightarrow a|c$

    c) Si $(a, b) = 1 \Longrightarrow (a, b \cdot c) = (a, c)$

    d) $(a, b) = 1 \Longrightarrow (7a - 3b, 2a - b) = 1$

    e) $(a, b) = 1 \Longrightarrow (2a - 3b, 5a + 2b) = 1$ o 19.

23. Probar:

    a) 29 no es divisor de $7^{30} + 7^{32}$

    b) 33 es divisor de $11^{11} + 11^{12}$

24. Dado $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, hallar los restos posibles de m^2 y m^3 en la división por 3, 4, 5 y 7.

25. Usando el ejercicio anterior, probar que:

    a) Si $7|(a^2 + b^2) \Longrightarrow 7|a$ y $7|b$.

    b) No existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $7|(a^3 + 2)$.

    c) ¿Existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que 5 sea divisor de $a^2 + 2$?

26. Hallar el resto de dividir a por b en los siguientes casos: (usar binomio de Newton).

(a) $a = 4^{38} + 1$	$b = 3$
(b) $a = 4^{1010101}$	$b = 5$
(c) $a = 9^{32}$	$b = 7$
(d) $a = 6^{55} + 1$	$b = 7$

27. ¿Son primos los siguientes números? Justifique su respuesta.

    a) $46^{104} - 1$

    b) $1000^{501} - 4$

28. Si m y n son enteros de igual paridad, probar que $m^2 - n^2$ es múltiplo de 4.

29. Si r y q son impares, probar que $r^3 - q^3$ es par. Existen condiciones sobre r y q para que sea múltiplo de 4?

30. Demostrar que no existen enteros m, n no nulos tales que $m^2 = 2 \cdot n^2$

31. Calcular la cantidad de divisores positivos de $10^n \cdot 11^n$. Idem para $10^n \cdot 8^{n+1}$ y para 9.000.

32. i)¿Cuál es el menor entero positivo que admite exactamente 6 divisores? ii)Hallar $m \in N$ con exactamente 10 divisores. ii) Hallar $m \in N$ con exactamente 25 divisores POSITIVOS y solo uno de ellos primo.

33. Hallar el menor entero positivo q tal que 6552 q es un cuadrado.

34. Determinar el conjunto de soluciones enteras de las siguientes ecuaciones:

    a) $5x + 8y = 3$

    b) $24x + 14y = 7$

    c) $20x + 16y = 36$

===========**Optativos:**===========================

35. *a*) Sean a y b números enteros y n un natural. Probar que
        1) $a - b | a^n - b^n$.
        2) si n es par entonces $a + b | a^n - b^n$.
        3) si n es impar entonces $a + b | a^n + b^n$.

    b) Probar que:
        1) $9^{2n} - 1$ es divisible por 20 $\forall n, n \in \mathbb{N}$
        2) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11,$\forall n, n \in \mathbb{N}$

36. Calcular (a, b) y $[a, b]$ en los siguientes casos:

    $a = 3^4 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 15 \quad b = 2^3 \cdot 7^2 \cdot 5^4$

    $a = 15^{20} \cdot 19^3 \cdot 3 \quad b = 2^3 \cdot 20$

37. Calcular la cantidad de tizas que contiene una caja sabiendo que si se las reparte entre 3 profesores, sobran 2; si se las reparte entre 4 profesores, sobran 3; y que la cantidad es un número entre 100 y 110.