ÁLGEBRA (Ciencias) – año 2017

PRÁCTICA N° 7

Complejos

1. Dados $z_1 = 17 + i$, $z_2 = -11 + 8i$, $z_3 = 30 - 2i$, $z_4 = \sqrt{2}$ y $z_5 = 1 + \pi i$.

   (a) Efectuar las siguientes operaciones:

   i. $z_1 + z_2 - 3z_3$

   ii. $\frac{1}{3}z_1 + z_3$

   iii. $\frac{z_2}{3} - 7z_3$

   iv. $z_1^{-1} + 3z_4^2$

   v. $z_4.z_5^2$

   (b) Determinar $A = \{x \in \mathbb{R}/x.z_2 = 44 - 32i\}$,
   $B = \{x \in \mathbb{R}/x.z_1 = z_2\}$
   y $C = \{z \in \mathbb{C}/z.z_1 = z_2\}$

2. Representar en el plano complejo el conjunto de complejos $z = a + bi$ tales que:

   (a) $a = 3b$

   (b) $b = 8$

   (c) $a^2 + b^2 = 9$

3. Representar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

   (a) $A = \{z \in \mathbb{C}/Re(z) - 5Im(z) = 2\}$

   (b) $B = \{z \in \mathbb{C}/Re(z^2) = 0\}$

   (c) $C = \{z \in \mathbb{C}/Re(z)^2 = 0\}$

   (d) $D = \{z \in \mathbb{C}/3 \leq \mid z - (2 + i) \mid < 5 \wedge Re(z) > Im(z)\}$

4. Resolver las siguientes operaciones:

   (a) $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{3+3i}{1+i}$

   (b) $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$

   (c) $\dfrac{1+3i}{1-i} - 2 \cdot \dfrac{2+3i}{1-2i}$

5. Hallar los $z \in \mathbb{C}$ tales que:

   (a) $\overline{z} = z$

   (b) $\overline{z} = -z$

   (c) $\overline{z} \cdot z = 1$

   (d) $i.z = \overline{z}$

   (e) $z^2 = \overline{z}$

6. (a) Hallar i^2, i^3, i^4, i^6, i^7

   (b) Hallar i^{38}, i^{143}, i^{23456}

(c) Hallar $\sum_{k=0}^{100} i^k$

7. Hallar el conjugado de z, siendo:

   (a) $z = \frac{1}{i} - i$

   (b) $z = |i + 2| + 2i$

   (c) $z = (1 - 2i) \cdot (2 - i) \cdot (1 + 1)$

   (d) $z = i^0 + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + i^9$

8. Hallar el módulo de z, siendo:

   (a) $z = -2i$

   (b) $z = \frac{2}{3} + \frac{-1}{5} i$

   (c) $z = -i - 1$

   (d) $z = i^{-5}$

9. Sean z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, analizar si vale en general, en $\mathbb{C}$:
   $z_1^2 + z_2^2 = 0 \Longleftrightarrow z_1 = z_2 = 0$

10. Sea $z_j \in \mathbb{C}$, demostrar:
    $|z_1 + z_2 + \cdots + z_k| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_k|, \qquad \text{para } k \geq 1$

    NOTA:

    Las siguientes identidades trigonométricas y tabla, son útiles para expresar algunos valores de senos y cosenos.

$$\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

grados	rad	sen	cos	tan
0	0	0	1	0
15	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$	$2 - \sqrt{3}$
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	–

11. Determinar el módulo y el argumento de los siguientes números complejos

    (a) $-2 - i$

    (b) i^{-2}

    (c) $\cos \frac{15}{4}\pi - i \operatorname{sen} \frac{15}{4}\pi$

    (d) $\frac{1}{i} + i^4$

12. Dados los siguientes números complejos en forma polar, expresarlos en forma binómica.

5_{120° $\quad \sqrt{5}_{45^\circ}$
1_{90° $\quad 3_{0^\circ}$

13. Sea $z = \alpha + \beta i$, representar en el plano complejo los siguientes conjuntos:

    (a) $X = \{z \in \mathbb{C}/\ |z - (2 + 2i)| \leq 9 \wedge\ 0 \leq Arg(z) \leq \dfrac{\pi}{2}\}$
    (b) $Y = \{z \in \mathbb{C}/\ |z| > 2 \wedge\ \pi \leq Arg(z) < 2\pi\}$
    (c) $A \cup B$, siendo $A = \{z \in \mathbb{C}/|z - (3 + 3i)| < 4 \wedge \dfrac{\pi}{4} < Arg(z) < \dfrac{\pi}{2}\}$
    y $B = \{z \in \mathbb{C}/|z - (5 + 5i)| < 4 \wedge 0 < Arg(z) \leq \dfrac{\pi}{4}\}$

14. Siendo $z \neq 0$, $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. Probar:

$$z^{-1} = r^{-1}(\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)) = r^{-1}(\cos(2\pi - \theta) + i \operatorname{sen}(2\pi - \theta))$$

15. Sea $z = \cos\frac{3}{4}\pi + i \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi$, expresar en forma trigonométrica los siguientes números complejos:

    (a) z^{-1}
    (b) $\overline{z}$
    (c) z^2

16. Probar que si $z, z' \in \mathbb{C}$ y verifican que $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(z')$ y $z \neq 0$, entonces $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}$

17. Hallar la forma trigonométrica de los siguientes complejos:

    (a) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$
    (b) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$
    (c) $1 - \sqrt{2}\, i$
    (d) $1 - i\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$
    (e) $\cos(-\frac{15}{4}\pi) - i \operatorname{sen}(\frac{15}{4}\pi)$

18. Calcular en forma trigonométrica $z_1 \cdot z_2$ y $\dfrac{z_1}{z_2}$:

    (a) $z_1 = 1 + 3i$ $\qquad z_2 = -2 + 3i$
    (b) $z_1 = 1 - 5i$ $\qquad z_2 = i$
    (c) $z_1 = 3 + 0i$ $\qquad z_2 = 0 + i$

19. Calcular aplicando la fórmula de De Moivre.

    (a) $(-3 + 3\sqrt{3}i)^3$
    (b) $(-\sqrt{2}, 3)^4$
    (c) $\dfrac{(1 + i)^5}{i^3 \cdot (1 - \sqrt{2}i)^2}$

20. Analizar para qué valores de $n \in \mathbb{N}$, el valor de $(1 + i)^n$ es:

    (a) Real positivo
    (b) Real negativo
    (c) Imaginario puro

21. ¿Cuáles de los siguientes números complejos son raíces n-ésimas de 1?

(a) $\cos\sqrt{3}\pi + i \operatorname{sen}\sqrt{3}\pi$

(b) $\cos\frac{3}{4}\pi + i \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi$

(c) $\cos\frac{15}{18}\pi + i \operatorname{sen}\frac{15}{18}\pi$

22. Determinar todos los complejos z tales que

(a) $z^4 = i.\overline{z}^3$

(b) $z^{12} + z^6 + 1 = 0$

(c) $z^8 = \overline{z}^8$

23. Determinar en cada caso la totalidad de soluciones en $\mathbb{C}$.

(a) $(z+1)^3 = z^3$

(b) $(z^2 - 3z + 1)^4 = 1$

(c) $z^4 = 4 + 3i$

(d) $z^2 + 2iz + 1 = 0$

(e) $(z+1)^4 + 1 = 0$

(f) $z^3 = -i$

(g) $(2iz^3 - 4 - 4i)(z-i)^2 = 0$

(h) $\frac{z}{z^2+9} + \frac{3}{z^2+6iz-9} = 0$

(i) $(z^2 + 1 + i)^2(z^2 - 1 - i)^2 = 4$

(j) $\frac{z}{(i+z)(z-i)} - \frac{i}{(z+i)^2} - \frac{2}{(z-i)} = 0$

24. (a) Hallar todas las raíces sextas de $1+i$.

(b) ¿Existe alguna raíz sexta de $1+i$ tal que su conjugado sea también raíz sexta de $1+i$?

(c) Hallar el producto de todas las raíces sextas de $1+i$.

25. (a) Un pentágono regular centrado en el origen de coordenadas cartesianas tiene uno de sus vértices en el punto $(-2,0)$. Calcular usando números complejos las coordenadas de sus restantes vértices.

(b) Idem parte a), pero para un hexágono regular centrado en $(-1,1)$ y con un vértice en $(-1,4)$.

26. (a) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que existen enteros positivos n, m tales que $z^n = z^m = 1$. Probar que si $d = (n,m)$ entonces $z^d = 1$.

(b) Probar que si n, m son números naturales coprimos, entonces si $z \in \mathbb{C} \wedge z^n = z^m = 1 \Longrightarrow z = 1$.

27. (a) Probar que calculada una de las raíces n-ésimas de un complejo, las demás se pueden obtener haciendo su producto con cada una de las raíces n-ésimas de la unidad.

(b) Calcular las raíces de $z^5 - i = 0$.

28. Representar en el plano complejo las raíces décimas de la unidad ¿Cuáles son primitivas?

29. Probar que: z es raíz primitiva de orden n de 1 si y sólo si $\overline{z}$ es raíz primitiva de orden n de 1.

30. Sea $z = \cos\frac{p}{q}\pi + i\operatorname{sen}\frac{p}{q}\pi$ con $(p,q) = 1$. Demostrar:

(a) Si p es par entonces z es raíz primitiva de orden q.

(b) Si p es impar entonces z es raíz primitiva de orden $2q$.

31. Analizar si $z = \cos\frac{25}{11}\pi + i\operatorname{sen}\frac{25}{11}\pi$, es raíz primitiva de orden 11 de 1.

32. Si n es par y z es raíz primitiva de orden n de 1, entonces $z^{n/2} = -1$

33. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos en $\mathbb{C}$ el conjunto: $G_n = \{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}$, de todas las raíces n-énesimas de 1.

    (a) Hallar G_1, G_2, G_3, G_4 y G_5.

    (b) Sean m, n números naturales, sea $d = (m, n)$, probar que $G_n \cap G_m = G_d$.

    (c) Probar que $G_n \subset G_m$ si y sólo $n|m$.

    (d) Probar que n es par si y sólo si $-1 \in G_n$.

=======================Optativos==================================

34. Sean z, z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, Probar:

    (a) Si $z \neq 0 \Longrightarrow (\overline{z})^{-1} = \overline{(z^{-1})}$

    (b) Si $z_2 \neq 0$, entonces $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

35. Sea z, z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, probar:

    (a) $|z| = |a|$, si $z = a$, $a \in \mathbb{R}$

    (b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

    (c) Si $z \neq 0$, entonces $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

    (d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ con $z_2 \neq 0$

    (e) $z_1 \cdot z_2 = 0 \Longleftrightarrow z_1 = 0 \ \vee \ z_2 = 0$

36. Determinar en cada caso la totalidad de soluciones en $\mathbb{C}$.

    (a) $(z-1)^6 = iz^6$

    (b) $(z-2)^5 = (z-3)^5$

    (c) $(z^6 + 2i)^{30} = 0$

37. Si $1, w, w^2$ son las raíces de $z^3 - 1$, probar que:

    (a) $(1 + w^2)^4 = w$

    (b) $(1 - w + w^2) \cdot (1 + w - w^2) = 4$

38. Sea $z \in G_n$ raíz primitiva de orden n. Sea $k \in \mathbb{N}$, entonces si $(k, n) = 1$, z^k es raíz primitiva de orden n.