ÁLGEBRA (Ciencias) – año 2017

PRÁCTICA N°

Relaciones

1. Demostrar:

   a) $X \times Y = \emptyset \Longleftrightarrow (X = \emptyset \vee Y = \emptyset)$

   b) $(X - Y) \times Z = (X \times Z) - (Y \times Z)$

   c) $(A \subset B \wedge C \subset D) \Rightarrow (A \times C \subset B \times D)$. ¿que hipótesis debo agregar para que valga la implicación recíproca?

   d) (A $\times$ B)$\cup$(C $\times$ D) $\subset$ (A$\cup$C) $\times$ (B$\cup$D). ¿Vale la igualdad?¿Por qué?

   e) ¿Cuándo $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset$? y ¿cuándo es vacío?

2. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ y las relaciones de A en B: S, T y R, definidas por:

   - $xSy \Leftrightarrow (x - 1 = y \vee x + 1 = y)$
   - $T = \{(1, 2), (2, 4), (3, 5)\}$
   - $1R2$, $1R3$, $1R4$, $1R5$.

   a) Obtener los gráficos cartesianos para cada una de estas relaciones. Además, determinar en cada caso dominio e imagen.

   b) Hallar: $S \cap R$, T^c y $T^{-1} - R^{-1}$

   NOTA: Si $\mathcal{R}$ es una relación de A en B, se llama $\mathcal{R}^c$ a $(A \times B) - \mathcal{R}$

3. Hallar dominio e imagen de $\mathcal{R}$ en los siguientes casos.

   a) Sea $E = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{R}$ la relación definida en $\mathcal{P}$(E) por:

      i) $A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

      ii) $A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

   b) En $\mathbb{N}$ la relación: $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow y \leq x$.
   Sea $A = \{2, 20, 200\}$. Determinar la imagen de A por la relación $\mathcal{R}$. Hallar $\mathcal{R}^{-1}(A)$.

   c) En $\mathbb{N}$ la relación: $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x + 2y = 40$.

   d) $\mathcal{R}$ definida en el conjunto de rectas del plano, como: $a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a \cap b \neq \emptyset$.

4. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación R en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

   a) $A = \{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 5)\}$

   b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

c) $A = \mathbb{N}$, $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + b$ es par$\}$

d) $A = \mathbb{R}$, R dada por $x\ R\ y \Leftrightarrow x - y \geq 0$.

e) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, R dada por $(m, n)R(m', n') \Leftrightarrow m = n'$.

5. Dar un ejemplo de una relación en $\mathbb{Z}$ que

   a) Sea simétrica y antisimétrica

   b) No sea ni simétrica ni antisimétrica

   c) Sea simétrica pero no reflexiva

6. Sea $\mathcal{R}$ una relación definida en un conjunto A. Establecer si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar

   a) Si $\mathcal{R}$ es reflexiva entonces $\mathcal{R}^{-1}$ es reflexiva.

   b) Si $\mathcal{R}$ es simétrica entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \neq \emptyset$.

   c) Si $\mathcal{R}$ no es simtrica entonces $\mathcal{R}$ es antisimtrica.

7. Ver que $(\mathbb{R}, H)$ es un conjunto ordenado donde $\leq$ es el orden usal de los reales, es decir

$$xHy \Leftrightarrow x - y \leq 0.$$

8. Considere $(\mathbb{R}, \leq)$ como en el Ejercicio anterior, y el subconjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x = \frac{1}{n}\ \wedge\ n \in \mathbb{N} \wedge\ n \neq 0\}.$$

   Analizar si A tiene primer y último elemento, si está bien ordenado, si admite cotas, supremo e ínfimo. Idem para

$$B = \{x \in \mathbb{R}\ :\ 1 \leq x < 2\}; C = \{x \in \mathbb{R}\ : \mid x \mid > 1\};\ y\, D = (0, 1] \cup [2, 3].$$

9. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ dos relaciones definidas respectivamente en los conjuntos A y B. Llamamos $\sim$ a la relación definida en $A \times B$ en la forma

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a\mathcal{R}a' \text{ y } b\mathcal{R}'b'$$

   Establecer si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   a) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son reflexivas entonces $\sim$ es reflexiva.

   b) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son simétricas entonces $\sim$ es simétrica.

   c) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son antisimétricas entonces $\sim$ es antisimétrica.

   d) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ son transitivas entonces $\sim$ es transitiva.

10. Considere en el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relación $\diamondsuit$ definida por

$$(n, m) \diamondsuit (s, t) \Leftrightarrow n \leq s$$

Analice las propiedades de esta relación. ¿Es de orden? ¿Puede dar otra relación con la que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ resulte ordenado?

11. Sea $E = \{1, 2, 3\}$ un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación definida en $\mathcal{P}(E)$ por $A\mathcal{R}B \iff A \subset B$. Demostrar que $(\mathcal{P}(E), \mathcal{R})$ es un conjunto ordenado.

    a) ¿Cuáles son los elementos maximales y cuáles los minimales?

    b) Consideremos ahora el conjunto $\mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$ con el orden inducido por $\mathcal{R}$, ¿cuáles serán ahora los elementos minimales?

12. Sea E un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación definida en $\mathcal{P}(E)$ por $A\mathcal{R}B \iff A \subset B$. Demostrar que $(\mathcal{P}(E), \mathcal{R})$ es un conjunto ordenado.

    a) ¿Cuáles son los elementos maximales y cuáles los minimales?

    b) Consideremos ahora el conjunto $\mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$ con el orden inducido por $\mathcal{R}$, ¿cuáles serán ahora los elementos minimales?

13. Sea $A = \{x \in \mathbb{N} \ : \ 1 \leq x \leq 10\}$ y sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{T}$ dos relaciones de orden definidas en A dadas por

    - $a\mathcal{R}b \iff a$ divide a b.
    - $a\mathcal{T}b \iff a$ es múltiplo de b.

    a) Hacer el diagrama de Hasse y hallar los elementos maximales y los elementos minimales.

    b) Idem inciso anterior en $A - \{1\}$.

14. Demostrar que si a es primer elemento de un conjunto ordenado (A, $\mathcal{R}$), entonces a es el único minimal de A.

15. Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con el orden representado en el primer diagrama de la Figura 1 y luego con el orden representado en el segundo diagrama.

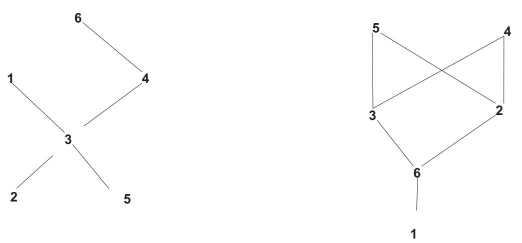

Figura 1: Diagramas de Hasse

En cada caso hallar los elementos minimales y maximales. Primer y último elemento. Cotas, supremo e ínfimo, primer y ltimo elemento del subconjunto $\{1, 3, 4\}$. Determinar un subconjunto que sea totalmente ordenado con el orden inducido.

16. Sea $A = \{a, b, c, d\}$,

   a) Sea $\{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ una partición de A. Obtener la relación de equivalencia asociada.

   b) ¿$\mathcal{S} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (b, a), (c, a)\}$ es una relación de equivalencia?

   c) Hallar dos relaciones de equivalencias en A. ¿Cuántas se pueden definir?

17. Sea $\sim$ una relación definida en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}-\{(0, 0)\}$ dada por:

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc$$

   Probar que $\sim$ es de equivalencia.

18. ¿Cuáles de las relaciones del ejercicio 4 son de equivalencia? Indique las clases y el conjunto cociente.

19. En el conjunto $\mathbb{N}$ se define la relación $(a, b)R(c, d)$ si y sólo si $a + d = b + c$. ¿Es de equivalencia? Si lo es, hallar la clase del elemento $(2, 5)$.

20. En $\mathbb{Q}$ se define la relación xRy si y sólo si existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \frac{3y+h}{3}$. Probar que R es una relación de equivalencia. ¿Los elementos $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{5}$ están en la misma clase?

==============Optativos===

21. En el conjunto $\mathbb{Z}$ se define la relación xRy si y sólo si $x^2 - y^2 = x - y$. Probar que es relación de equivalencia y hallar el conjunto cociente.

22. En cada uno de los siguientes casos, dígase si el conjunto X tiene o no una cota inferior, y si tiene alguna hállese su ínfimo si existe:

   a) $X = \{x \in \mathbb{Z} |\ x = 2y \text{ para algún } y \in \mathbb{Z}\}$.

   b) $X = \{x \in \mathbb{Z} |\ x^2 \leq 100x\ \}$.