ÁLGEBRA (Ciencias) – año 2017

PRÁCTICA N°

Congruencias

1. Dado $m \in \mathbb{N}$, sea $\sim$ la relación definida en $\mathbb{Z}$ en la forma

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b = k.m.$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$. ¿ La relación $\sim$ es de orden? ¿ Es de equivalencia? Justifique.

2. Se define en $\mathbb{Z}$ la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y = 3k, k \in \mathbb{Z}$$

Hallar las clases de equivalencia y dar el conjunto cociente.

3. Sea $m \in \mathbb{N}$ y $b \geq m$. Probar que existe a tal que $0 \leq a < m$ tal que $a \equiv b \text{ mod}(m)$.

4. Sea $m \in \mathbb{N}$ y $0 \leq a \leq b < m$ Probar que $a \equiv b \text{ mod}(m) \Leftrightarrow a = b$.

5. Sean $p > 0$ primo, y $a, b \in \mathbb{Z}$. Mostrar que $(a+b)^p \equiv_p a^p + b^p$. ¿Es esta afirmación válida si p es compuesto? Justificar. (Indicación: probar primero por inducción que $\binom{m}{n}$ es natural y luego que si m es un primo entero positivo y $0 < n < m$, $m \mid \binom{m}{n}$.)

6. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

   a) $10 \equiv -1 \mod(11)$

   b) $3 \equiv 0 \mod(2)$

   c) $1 \equiv -1 \mod(2)$

7. Hallar m tal que

   a) $11 \equiv 19 \text{ mod}(m)$.

   b) $13 \equiv -13 \text{ mod } (m)$.

   c) $40 \equiv 20 \text{ mod } (m)$.

8. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a \equiv 3 \text{ mod}(11)$.

9. Determinar $x \in \mathbb{Z}$ tales que:

   a) $17x \equiv 3\text{mod } (11)$

   b) $56x \equiv 28\text{mod } (35)$

   c) $33x \equiv 27\text{mod } (45)$

10. Probar la siguiente regla de divisibilidad por 5: *Un número es divisible por 5 si su último dígito es divisible por 5.*

11. Hallar una regla de divisibilidad por 3. Justificar.

12. Sea $t \in \mathbb{Z}$, diremos que t es invertible módulo m si existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $t \cdot h \equiv 1 \bmod(m)$.

    a) Dados $t = 2, 3, 4, 5, 6$, determinar m tal que t sea invertible módulo m.

    b) Probar que si $(m, t) = 1$ entonces t es invertible módulo m.

13. Calcular el resto de la división de 24^{1901} por 11.

14. Calcular el resto de la división de 7^{1601} por 5.

15. Sabiendo que $a \equiv 22 \bmod(14)$, hallar el resto de la divisin de a por 2; por 7; y por 14.

16. Calcular el resto de dividir $166^{1328}\,4878 + 19999$ por 5.

17. Calcular el resto de dividir $34^{17771} - 6^{10001}$ por 35.