ÁLGEBRA LINEAL (Observatorio) – Año 2016

TRABAJO PRÁCTICO N° 10: Tensores

Producto Tensorial de Espacios Vectoriales

1. Probar que todo elemento $z \in V \otimes W$ se descompone como $z = \sum_{k=1}^{r} v_k \otimes w_k$ donde los vectores $v_1, ..., v_r \in V$ y $w_1, ..., w_r \in W$, son linealmente independientes.

2. Sea $z \in V \otimes W$ donde V y W son K-espacios vectoriales de dimensión finita, , $z \neq 0$. Probar que la descomposición $z = x \otimes y = x' \otimes y'$ es única si y sólo si $x' = \lambda x$ y $y' = \lambda^{-1} y$, con $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$.

3. Hallar una base para los productos tensoriales $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$

4. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz del operador $\mathcal{A}$ en la base $\{e_1, ..., e_n\}$ de V y $B = (b_{kl})$ la matriz del operador $\mathcal{B}$ en la base $\{f_1, ..., f_m\}$ de W. La matriz del operador $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ en la base $\{e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2 ..., e_1 \otimes f_m, ..., e_n \otimes f_1, ..., e_n \otimes f_m\}$ del espacio $V \otimes W$ es el producto tensorial denotado por $A \otimes B$ dado por:

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

   Demostrar que $det\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = (det\mathcal{A})^m (det\mathcal{B})^n$

Álgebra Tensorial

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Identificar el espacio tensorial del tipo (p, q) sobre V, denominado $T_q^p(V)$, en cada uno de los siguientes casos: a) $T_0^0(V)$, b) $T_0^1(V)$, c) $T_0^1(V)$, d) $T_2^2(V)$

2. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, y sea $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ su base dual.

   (a) Calcular la matriz asociada a $\alpha \otimes \beta \in T_2^0(V)$ respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, siendo $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$ y $\beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$

   (b) Calcular la matriz asociada a $\theta \otimes v \in T_1^1(V)$ respecto de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, siendo $\theta = 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_3$ y $v = 2e_1 - e_2$

3. Mostrar que todo tensor $(1, 1)$ (es decir, 1-contravariante, 1-covariante) puede considerarse como el conjunto de los elementos de la matriz de un operador lineal.

4. Mostrar que al contraer p-veces un tensor del tipo (p, p) se obtiene como resultado un escalar (invariante).

5. Sea G el tensor métrico del espacio Euclideo V y sea G' el tensor cuyas coordenadas satisfacen $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$, llamado tensor métrico contravariante (o conjugado). Demostrar que el tensor G' así definido es un tensor 2-contravariante sobre V.

6. Sea un tensor de tipo $(2,1)$ a^{ij}_{k}. Analizar qué tipo de tensor se obtiene

   (a) al contraerlo con un tensor métrico g_{pj}

   (b) al contraerlo con un tensor métrico g^{qk}