ÁLGEBRA LINEAL (Observatorio) – Año 2016

TRABAJO PRÁCTICO N° 1

Espacios Vectoriales

1. Analizar si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$:

   (a) El conjunto de puntos $V = \{(x, y) \,:\, y = 2x + 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

   (b) $V = C[a, b]$ el conjunto de las funciones continuas (a valores reales) definidas en el intervalo $[a, b]$, con las operaciones: dadas $f, g \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

   $$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{y} \quad (\alpha f)(x) := \alpha[f(x)].$$

   (c) El conjunto de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

   $$f(-t) = \overline{f(t)}.$$

   (con las mismas operaciones que en el inciso anterior).

   (d) $GL_3(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices invertibles de 3×3 con entradas reales, con la suma definida de la siguiente manera: dadas $A, B \in GL_3(\mathbb{R})$, la "suma" de matrices está definida por $A + B := AB$ (y el producto por escalares definido de la forma usual).

   (e) El conjunto de matrices antisimétricas de $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$. Recordemos que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es *antisimétrica* si $A^t = -A$, donde A^t es la matriz traspuesta de A.

2. Sea F un cuerpo. Sea V el conjunto de los pares (x, y) de elementos de F. Se define

   $$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ c(x, y) &= (cx, y) \end{aligned}$$

   siendo $c \in F$. ¿Es V, con estas operaciones, un espacio vectorial sobre el cuerpo F?

Subespacios de un espacio vectorial

1. Sea V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de V son subespacios vectoriales de V?

   (a) $\{f \in V \,:\, f(x^2) = f(x)^2\}$.

   (b) $\{f \in V \,:\, f(0) = f(1)\}$.

   (c) $\{f \in V \,:\, f(3) = 1 + f(2)\}$.

   (d) $\{f \in V \,:\, f(-2) = 0\}$.

   (e) $\{f \in V \,:\, f \text{ es continua}\}$.

2. Sea K un cuerpo. Dados V_1 y V_2 dos subespacios de un K-espacio vectorial V, probar que:

   (a) $V_1 \cap V_2$ es un subespacio de V.

(b) $V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 \,:\, v_i \in V_i\}$ es un subespacio de V.

En general, ¿$V_1 \cup V_2$ es un subespacio vectorial de V? Si la respuesta es negativa, dar un ejemplo.

3. Sea K un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Sea $M_n(K)$ el K-espacio vectorial de las matrices de $n \times n$ sobre K. ¿Cúales de los siguientes conjuntos de matrices son subespacios de $M_n(K)$?

   (a) $GL_n(K) = \{A \in M_n(K) \,:\, A \text{ es inversible}\}$.
   (b) $V = \{A \in M_n(K) \,:\, A \text{ no es inversible}\}$.
   (c) Fijada $B \in M_n(K)$, $V = \{A \in M_n(K) \,:\, AB = BA\}$.
   (d) $\mathcal{Q} = \{A \in M_n(K) \,:\, A^2 = A\}$.

4. Sea V el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Sea V_{par} el subconjunto de las funciones pares ($f(-x) = f(x)$) y V_{imp} el conjunto de las funciones impares ($f(-x) = -f(x)$). Probar que:

   (a) V_{par} y V_{imp} son subespacios de V.
   (b) $V_{par} + V_{imp} = V$.
   (c) $V_{par} \cap V_{imp} = \{0\}$.

5. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V tales que

$$V = W_1 + W_2 \quad \text{y} \quad W_1 \cap W_2 = \{0\}.$$

   Probar que, para todo vector $v \in V$, existen únicos vectores $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 + w_2$.

Bases y dimensión

1. Determine el subespacio vectorial generado por el conjunto de vectores dado, en el espacio vectorial correspondiente:

   (a) En $\mathbb{R}^3$: $A = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$.
   (b) En $\mathbb{R}^3$: $A = \{(2,0,1), (3,1,2), (1,1,1), (7,3,5)\}$.
   (c) En $M_2(\mathbb{R})$: $A = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.
   (d) En $P_2(\mathbb{R})$, el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 2: $A = \{1 - x, 3 - x^2, x + x^2\}$.

2. Probar que dos polinomios no son suficientes para generar $P_2(\mathbb{R})$.

   (Ayuda: ¿Cuál es la dimensión de $P_2(\mathbb{R})$?)

3. Sean $v_1, \ldots, v_k$ vectores distintos de un espacio vectorial V de dimensión n ($k < n$). Sea $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ el subespacio vectorial de V generado por $\{v_1, \ldots, v_k\}$, es decir,

$$x \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \text{existen } \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F \text{ tales que } x = \alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_k v_k.$$

   Probar que, si W es un subespacio de V que contiene a $v_1, \ldots, v_k$, entonces $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ es subespacio de W. Es decir, $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ es el *menor* subespacio que contiene a $v_1, \ldots, v_k$.

4. Escribir el espacio de soluciones en $\mathbb{R}^4$ del sistema lineal homogéneo

$$\begin{cases} 2x + 4y - w = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 8y - 6z - w = 0 \end{cases}$$

en términos de la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^4$. ¿Conoce otra base en la que resulte más natural expresar las soluciones?

5. Probar que, si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita V, entonces
$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2).$$

6. Sea $M_2(\mathbb{C})$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de matrices de 2×2. Sea W_1 el conjunto de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix}$ y sea W el conjunto de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix}$.
   (a) Demostrar que W_1 y W_2 son subespacios de V.
   (b) Hallar la dimensión de W_1, W_2, $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.

7. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Supongamos que u, v y w son vectores linealmente independientes de V. Demostrar que $u+v$, $v+w$ y $w+u$ son linealmente independientes.

8. Sea $M_2(\mathbb{C})$ el conjunto de las matrices de 2×2 con entradas complejas. Encontrar una base de este espacio como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, y otra como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

9. Sea $M_n(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial formado por las matrices de $n \times n$ con entradas reales. Sean $M_n^{sim}(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = A\}$ y $M_n^{ant}(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$ los subespacios de matrices simétricas y antisimétricas, respectivamente. Calcular la dimensión de éstos.

10. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ un conjunto finito de vectores en un K-espacio vectorial V de dimensión n ($n > k$). Sea $A \in GL_n(K)$ una matriz inversible de $n \times n$ con entradas en K y $T = \{Av_1, \ldots, Av_k\}$. Probar que:
    (a) S es linealmente independiente si y sólo si T es linealmente independiente.
    (b) Si W es el K-subespacio generado por S y W' es el K-subespacio generado por T, entonces $W' = A(W)$.