ÁLGEBRA LINEAL – (Observatorio) Año 2016

TRABAJO PRÁCTICO N° 2

Coordenadas - Cambio de base

1. Consideremos las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1,-2),\ u_2 = (3,-4)\} \text{ y } \mathcal{B}_2 = \{v_1 = (1,3), v_2 = (3,8)\}.$$

   (a) Encontrar las coordenadas de un vector arbitrario $w = (a, b)$ relativas a la base $\mathcal{B}_1$.

   (b) Hallar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$ de $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$. (P es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{B}_1$ respecto a la base $\mathcal{B}_2$).

   (c) Encontrar las coordenadas de un vector arbitrario $w = (a, b)$ relativas a la base $\mathcal{B}_2$.

   (d) Determinar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ de $\mathcal{B}_2$ en $\mathcal{B}_1$.

   (e) Comprobar que $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = P^{-1}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$.

   (f) Mostrar que $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}[w]_{\mathcal{B}_1} = [w]_{\mathcal{B}_2}$ para todo vector $w = (a, b)$.

2. En $M_2(\mathbb{R})$, el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de matrices de 2×2, escribir la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ en términos de la base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. En $P_2(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2 (junto con el polinomio nulo) con coeficientes reales, la base canónica es $\{1, x, x^2\}$. Consideremos otra base ordenada, $\mathcal{B} = \{4x - 1, 2x^2 - x, 3x^2 + 3\}$. Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, escribir a $p(x)$ en términos de la base $\mathcal{B}$.

4. Consideremos la base $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 2, 0), u_2 = (1, 3, 2), u_3 = (0, 1, 3)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Hallar

   (a) La matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ desde la base canónica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ hasta la base $\mathcal{B}$.

   (b) La matriz de cambio de base $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ desde la base $\mathcal{B}$ hasta la base canónica $\mathcal{E}$.

5. Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales y $\theta \in (0, 2\pi)$ un número real fijo. Consideremos los vectores $v_1 = (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)$ y $v_2 = (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$.

   (a) Probar que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Intuitivamente, ¿qué representa el cambio de base de la base canónica a $\mathcal{B}$?

6. Sea W el subespacio de $\mathbb{C}^3$ generado por $v_1 = (1, 0, i)$ y $v_2 = (1 + i, 1, -1)$.

   (a) Demostrar que los vectores $w_1 = (1, 1, 0)$ y $w_2 = (1, i, 1+i)$ pertenecen a W y forman una base de W.

   (b) Calcular las coordenadas de v_1 y v_2 en la base ordenada $\{w_1, w_2\}$ de W.

7. Sea V el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$. Sean $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$ y $f_3(x) = \cos(x) - i\,\mathrm{sen}(x)$.

   (a) Demostrar que f_1, f_2 y f_3 son linealmente independientes.

   (b) Sean $g_1(x) = i$, $g_2(x) = \cos(x)$ y $g_3(x) = \mathrm{sen}(x)$. Hallar una matriz inversible P de 3×3 tal que
   $$g_j = \sum_{i=1}^{3} P_{ij} f_i.$$

8. Consideremos a $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Sea $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y sean
   $$u_1 = e_2 - e_1,\ \ u_2 = e_3 - e_2\ \ , \ldots ,\ \ u_{n-1} = e_n - e_{n-1},\ \ u_n = e_n.$$

   (a) Probar que $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$.

   (b) Si $n = 3$, hallar las matrices cambio de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$.

   (c) Mostrar que $[v]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}\,[v]_{\mathcal{E}}$ para todo vector $v \in \mathbb{R}^3$.

9. Consideremos a $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Sea $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y sean
   $$u_1 = e_1 - \tfrac{1}{2}e_2,\ \ u_2 = e_2 - \tfrac{1}{3}e_3\ \ , \ldots ,\ \ u_{n-1} = e_{n-1} - \tfrac{1}{n}e_n,\ \ u_n = e_n.$$

   (a) Probar que $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$.

   (b) Si $n = 4$, hallar las matrices cambio de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ (sin invertir matrices).

   (c) Mostrar que $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}^{-1}$.

10. Sea $P_m[x]$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales (en la indeterminada x) de grado menor o igual a m. Sea $\mathcal{E} = \{e_0 = 1, e_1 = x, e_2 = x^2 \ldots, x_m = x^m\}$ la base canónica de $P_m[x]$ y sean
    $$u_0 = x - 1, u_1 = x(x-1), \ldots, u_{m-1} = x^{m-1}(x-1), u_m = x^m.$$

    (a) Probar que $\mathcal{B} = \{u_0, \ldots, u_m\}$ es base de $P_m[x]$.

    (b) Si $n = 3$, hallar las matrices cambio de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ (sin invertir matrices).

    (c) Mostrar que $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}^{-1}$ y que $[p(x)]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}[p(x)]_{\mathcal{E}}$ para todo $p(x) \in P_m[x]$.