ÁLGEBRA LINEAL (Observatorio) – Año 2016

TRABAJO PRÁCTICO N° 3

Transformaciones Lineales - Ejemplos

1. Establecer si las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales, justificando en cada caso:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, con $T(x, y) = (x, y + 1)$

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, con $T(x, y, z) = (0, 0)$

   (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, con $T(x, y, z) = (x, x + y + z)$

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con $T(x, y, z) = 3\,x + 8\,z$.

   (e) $T : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ dada por:

      i. $T(x, y) = \begin{pmatrix} x & y+1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$.

      ii. $T(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x+y \end{pmatrix}$.

   (f) Considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $T(u + i\,v) = u - i\,v$.

   (g) Dado un cuerpo K, la aplicación *traza*, $\mathrm{tr} : M_n(K) \to K$, definida por $\mathrm{tr}((a_{i\,j})) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i}$.

   (h) Dado un cuerpo K, la *proyección a la i-ésima coordenada*, $\pi_i : K^n \to K$, definida por $\pi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_i$

2. (a) Sea K un cuerpo. Fijada una matriz A en $M_{n,m}(K)$, el K-espacio vectorial de las matrices de $n \times m$ con coeficientes en K, probar que la aplicación $T : K^m \to K^n$ definida por

   $$T(x_1, \ldots, x_m) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

   es una transformación lineal.

   (b) Sea $M \in M_n(K)$, $M \neq 0$. Determinar cuales de las siguientes aplicaciones $T : M_n(K) \to M_n(K)$ son lineales:

      i. $T(A) = MA$,

      ii. $T(A) = MA - AM$,

      iii. $T(A) = A + M$.

3. Dado $m \in \mathbb{N}$, sea $P_m(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de polinomios reales de grado menor o igual a m. Probar que las siguientes son transformaciones lineales:

   (a) $D : P_m(\mathbb{R}) \to P_{m-1}(\mathbb{R})$ dada por

   $$D(a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m) = 1.a_1 + 2.a_2 x + \ldots + m.a_m x^{m-1}.$$

   (b) $I : P_m(\mathbb{R}) \to P_{m+1}(\mathbb{R})$ dada por $I(a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m) = \frac{a_0}{1} x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_m}{m+1} x^{m+1}$.

Núcleo, imagen y preimagen de una transformación lineal

1. Dado un cuerpo K, sea $T : V \to V'$ una transformación lineal entre dos K-espacios vectoriales. Sean S y S' subespacios de V y V', respectivamente. Probar que los conjuntos $T(S)$, $T^{-1}(S')$ y $N(T)$ son subespacios vectoriales.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por: $T(x, y, z) = (x + y, x + z)$. Determinar el núcleo y la imagen de T, además calcular sus dimensiones. Caracterizar el conjunto $T^{-1}(C)$, siendo $C = \{(x, y) : x = 1\}$.

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (3x + 4y, 4x - 3y)$ y sea S^1 la circunsferencia unidad en $\mathbb{R}^2$, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Hallar $T(S^1)$ y $T^{-1}(S^1)$.

4. Sea $T : P_3(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ dada por: $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + (a_1 - a_2)x$. Determinar el núcleo y la imagen de T y calcular sus dimensiones.

5. Sea V un espacio vectorial y $T : V \to V$ una transformación lineal. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (a) $N(T) \cap Im(T) = \{0\}$.
   (b) Si $T(Tv) = 0$ entonces $Tv = 0$.

6. (a) Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo K y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Probar que T es inyectiva si y sólo si $T^{-1}(0) = \{0\}$.
   (b) Dar ejemplos de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no sean inyectivas pero que satisfagan $f^{-1}(0) = \{0\}$.

7. Demostrar que si $T : V \to W$ es suryectiva entonces $\dim W \leq \dim V$.

8. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un conjunto finito de vectores de V. Consideremos la aplicación lineal $E : K^m \to V$ definida por

$$E(k_1, \ldots, k_m) = k_1.v_1 + \ldots + k_m.v_m$$

   (a) Probar que E es lineal.
   (b) Verificar que, E es inyectiva si y sólo si X es linealmente independiente.
   (c) Verificar que, E es suryectiva si y sólo si X es un conjunto de generadores de V.

9. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo K. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, probar que
   (a) T es inyectiva si y sólo si $\dim(Im(T)) = \dim V$;
   (b) T es suryectiva si y sólo si $\dim(Im(T)) = \dim W$;
   (c) si $\dim V = \dim W$, $N(T) = \{0\}$ si y sólo si T es suryectiva.