ÁLGEBRA LINEAL (Observatorio) – Año 2016

TRABAJO PRÁCTICO N° 4

Matriz asociada a una transformación lineal

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (z, y + z, x + y + z)$.

   (a) Hallar la representación matricial de T relativa a la base canónica
   $$\mathcal{E} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}.$$

   (b) Si $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 2, 3), u_3 = (1, 3, 5)\}$, hallar las matrices cambio de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$.

   (c) Hallar la matriz de T respecto a la base $\mathcal{B}$.

2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por $F(x, y) = (3\,x + y, -y, x + y)$ y sean
   $$B = \{(1, 1),\ (-1, 0)\}\ \ ,\ \ B' = \{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 2, 1)\}$$
   las bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Encontrar $[F]_{B'\,B}$ (matriz de la transformación F en las bases B y B').

3. Sea $V = M_2^{sim}(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial formado por las matrices simétricas de 2×2. Fijada $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, sea F el endomorfismo de V dado por $F(X) = M\,X + X\,M$. Hallar la matriz de F en la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

4. Sea $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $G(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$.

   (a) Hallar la representación matricial de G relativa a la base ordenada
   $$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}.$$

   (b) Comprobar que $[G(v)]_{\mathcal{B}} = [G]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$ para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$.

5. Sea $T : P_2 \to P_1$ la transformación lineal definida por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$. Hallar la matriz de T con respecto a las bases stándard de P_2 y P_1.

6. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K y sea $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base ordenada de V. Consideremos un endomorfismo T de V.

   (a) ¿Cuál es la matriz de T en la base B si $T(b_j) = b_{j+1},\ j = 1, \ldots, n - 1$; y $T(b_n) = 0$?

   (b) Demostrar que $T^n = 0$, pero $T^{n-1} \neq 0$.

   (c) Sea S cualquier operador lineal sobre V tal que $S^n = 0$, pero $S^{n-1} \neq 0$. Demostrar que existe una base ordenada B' de V tal que la matriz $[S]_{B'}$ coincide con la matriz hallada en (a).

   (d) Demostrar que si M y N son matrices $n \times n$ sobre K tales que $M^n = N^n = 0$, con $M^{n-1} \neq 0$ y $N^{n-1} \neq 0$, entonces M y N son semejantes.

Espacio de Transformaciones lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Denotemos $L(V,W)$ al conjunto de las aplicaciones K-lineales de V en W. Dadas $S,T \in L(V,W)$ y $\alpha \in K$ definimos

$$(S+T)(v) := S(v)+T(v) \quad \text{y} \quad (\alpha.T)(v) := \alpha.T(v) \quad \text{para todo } v \in V.$$

1. Verificar que $L(V,W)$ con estas operaciones es un K-espacio vectorial.

2. Si $\dim_K V = n$ y $\dim_K W = m$, encontrar un isomorfismo entre $L(V,W)$ y $M_{m,n}(K)$, el espacio vectorial de las matrices de $m \times n$ con coeficientes en K.

3. Mostrar que si U, V y W son K-espacios vectoriales, $S \in L(U,V)$ y $T \in L(V,W)$, entonces $T \circ S \in L(U,W)$.

Transformaciones Lineales Inversibles

1. Sean A, B y C conjuntos y $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones. Mostrar que:

   (a) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
   (b) Si f y g son suryectivas, entonces $g \circ f$ es suryectiva.
   (c) Si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.
   (d) Si $g \circ f$ es suryectiva entonces g es suryectiva.

2. Dado un conjunto X notaremos I_X a la función "identidad" sobre X, es decir, $Id_X(x) = x$ para todo $x \in X$. Sean A y B conjuntos no vacíos y $f : A \to B$ una función. Probar que f tiene inversa si y sólo si es inyectiva y suryectiva.

3. Sea $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^3$ y T el (único) operador lineal sobre $\mathbb{C}^3$ para el que
   $$Te_1 = (1,0,i), \quad Te_2 = (0,1,1), \quad Te_3 = (i,1,0).$$
   ¿T es inversible?

4. Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ definido por
   $$T(x,y,z) = (3x, x-y, 2x+y+z).$$

   (a) Probar que T es inversible y hallar una expresión para T^{-1} como aquella que define a T.
   (b) Demostrar que $(T^2 - I)(T - 3I) = 0$.

5. Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ y sea T el operador lineal sobre $M_n(\mathbb{C})$ definido por $T(A) = BA$.

   (a) ¿T es inversible?
   (b) Calcular el rango de T.
   (c) Describir a T^2.

Cambio de Base - Matrices Similares

1. Consideremos el cuerpo complejo $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Sea T el operador de conjugación en $\mathbb{C}$, esto es, $T(z) = \bar{z}$.

   (a) Hallar la matriz de T en cada una de las siguientes bases:

      i. $\mathcal{B}_1 = \{1, i\}$.

      ii. $\mathcal{B}_2 = \{1 + i, 1 + 2i\}$.

   (b) Encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$ de $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$.

   (c) Encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ de $\mathcal{B}_2$ en $\mathcal{B}_1$.

   (d) Comprobar que $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.

   (e) Comprobar que $[T]_{\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}[T]_{\mathcal{B}_1}P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.

2. Sea T el operador lineal en $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (3x + z, -2x + y, -x + 2y + 4z)$.

   (a) ¿Cuál es la matriz de T en la base canónica $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$?

   (b) ¿Cuál es la matriz de T en la base ordenada

   $$\mathcal{B} = \{b_1 = (1, 0, 1),\ b_2 = (-1, 2, 1),\ b_3 = (2, 1, 1)\}?$$

   (c) Demostrar que T es inversible y dar una expresión de T^{-1} similar a la dada para T.

3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (2x - 7y - 4z, 3x + y + 4z, 6x - 8y + z)$.

   (a) Hallar la representación matricial de T relativa a la base canónica $\mathcal{E}$.

   (b) Hallar la matriz de T respecto a la base

   $$\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 2, 3), u_3 = (1, 3, 5)\}.$$

   (c) Hallar las matrices cambio de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$.

   (d) Comprobar que $[T]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}\,[T]_{\mathcal{B}}\,P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (z, y + z, x + y + z)$.

   (a) Hallar la representación matricial de T relativa a la base canónica $\mathcal{E}$.

   (b) Si $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 1, 1)\}$, hallar las matrices cambio de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$.

   (c) Hallar la matriz de T respecto a la base $\mathcal{B}$.

   (d) Comprobar que $[T]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}\,[T]_{\mathcal{B}}\,P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$.

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (x + y, 2y + 2z, 3x + 3z)$.

   (a) Hallar la representación matricial de T relativa a la base canónica $\mathcal{E}$.

   (b) Si $\mathcal{B} = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 2, 0)\}$, hallar las matrices cambio de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$.

   (c) Hallar la matriz de T respecto a la base $\mathcal{B}$.

   (d) Comprobar que $[T]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}\,[T]_{\mathcal{B}}\,P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$.