# ÁLGEBRA LINEAL (Observatorio) – Año 2016

### TRABAJO PRÁCTICO N° 5

---

## Formas Canónicas Elementales

1. (a) Hallar los autovalores y los espacios propios de las siguientes matrices:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$
   (b) Sea $T \in End_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^2$ dado por $T(z,w) = (w,-z)$. Hallar los autovalores de $T$ y los autovectores correspondientes.

2. (a) Dado un cuerpo $K$, sea $A \in M_n(K)$ inversible. Probar que los autovalores de $A^{-1}$ son los inversos de los autovalores de $A$; y que los espacios propios correspondientes a autovalores inversos coinciden.
   (b) Dado un cuerpo $K$, sea $A \in M_n(K)$ una matriz triangular. Demostrar que los autovalores de $A$ son los elementos de la diagonal de $A$.

3. Establecer, justificando en cada caso, cuales de las matrices del Ejercicio 1.(a) son diagonalizables. En el caso de las matrices diagonalizables obtener la matriz diagonal y el cambio de base correspondiente.

4. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$
   ¿Es $A$ semejante, sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, a una matriz diagonal? ¿Es $A$ semejante, sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, a una matriz diagonal? En caso afirmativo calcular la matriz diagonal correspondiente.

5. Sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   Indicar para qué valores de $\alpha$ y $\beta$ la matriz es diagonalizable.

6. Sea $B \in M_2(\mathbb{R})$ simétrica. Demostrar que $B$ es semejante, sobre $\mathbb{R}$, a una matriz diagonal.

7. (a) Hallar los polinomios característico y minimal de $T \in End_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z) = (x, x+y, z)$.
   (b) Calcular los autovalores y una base para cada espacio propio de $T$.
   (c) Establecer si $T$ es o no diagonalizable.

8. Dadas las matrices $A$ y $B$, mostrar que tienen distintos polinomios característicos y que sus polinomios minimales coinciden.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Usando las propiedades del polinomio minimal establecer si $A$ es o no diagonalizable, considerando que:
   (a) $A$ pertenece al $\mathbb{R}$-espacio vectorial $M_2(\mathbb{R})$.
   (b) $A$ pertenece al $\mathbb{C}$-espacio vectorial $M_2(\mathbb{C})$.

10. Sea $A$ una matriz cuadrada tal que $A \neq I$ y $A^3 - A^2 + A = I$. Establecer si $A$ es o no diagonalizable considerándola:
    (a) sobre el cuerpo $\mathbb{R}$;
    (b) sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

    Justificar en cada caso.

11. Sea $B \in M_4(\mathbb{R})$:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
    (a) Demostrar que el polinomio característico de $B$ es $p(x) = x^2\,(x-1)^2$ y que coincide con el polinomio minimal.
    (b) ¿Es $B$ semejante, sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, a una matriz diagonal?

12. Sea $D$ el operador derivación sobre el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones diferenciables de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Si $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, demostrar que las funciones $\operatorname{sen}(kx)$ y $\cos(kx)$ son vectores propios de $D^2$. ¿Cuáles son los valores propios correspondientes?

13. Dado un cuerpo $K$, sean $A, B \in M_n(K)$ y sea $v \neq 0$ un autovector de $A$ y de $B$. Probar que $v$ es también autovector de la matriz $\alpha\, A + \beta\, B$, para cualquier par de escalares $\alpha, \beta \in K$.

## Proyecciones - Subespacios Invariantes - Descomposiciones

1. Hallar una proyección $E$ que proyecte $\mathbb{R}^2$ sobre el subespacio generado por $(1, -1)$ según el subespacio generado por $(1, 2)$.

2. Probar que si $E$ es una proyección y $f$ es un polinomio, entonces $f(E) = a\,I + b\,E$. Qué son $a$ y $b$ en términos de los coeficientes de $f$?

3. Sea $T$ un operador diagonalizable tal que sus únicos valores propios son el 0 y el 1. Es $T$ una proyección?

4. Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   utilizar el teorema de Hamilton-Cayley para hallar $A^{-1}$, $A^3$ y $A^{-3}$

5. Sea $T$ el operador lineal sobre $\mathbb{R}$ cuya matriz en la base ordenada canónica es:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Demostrar que los únicos subespacios de $\mathbb{R}^2$ invariantes por $T$ son $\mathbb{R}^2$ y el subespacio nulo.

(b) Si $U$ es el operador lineal en $\mathbb{C}^2$, cuya matriz en la base ordenada canónica es $A$, demostrar que $U$ tiene algún subespacio unidimensional invariante.

6. Dado un espacio vectorial $V$ sobre un cuerpo $K$, sean $S$, $T \in End_K V$ tales que $S \circ T = T \circ S$. Cunsideremos un autovalor $\lambda$ de $T$ y $E_T(\lambda)$ su espacio propio. Probar que $E_T(\lambda)$ es $S$-invariante.

7. Sea $T \in End_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base canónica es $A = [T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, y sea $W_1$ el subespacio de $\mathbb{R}^2$ generado por $(1,0)$.

(a) Probar que $W_1$ es $T$-invariante.

(b) Demostrar que no existe un subespacio $W_2$ que sea $T$-invariante tal que $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

8. Sea $A$ la matriz que representa a $T \in End_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ en la base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) A partir de su polinomio minimal establecer si $A$ es diagonalizable.

(b) En caso de no serlo, encontrar dos subespacios $T$-invariantes $W_1$ y $W_2$ tales que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

9. Sea $T$ un operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ representado en la base ordenada canónica por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Expresar el polinomio minimal $m_T(x)$ de $T$ en la forma $m_T(x) = p_1(x)\,p_2(x)$, con $p_1(x)$ y $p_2(x)$ polinomios mónicos e irreducibles sobre $\mathbb{R}$.

(b) Sea $W_i = N(p_i(T))$, $i = 1, 2$. Hallar bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ para los subespacios $W_1$ y $W_2$, respectivamente.

(c) Si $T_i = T|_{W_i}$, hallar la matriz de $T_i$ en la base $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$.