ÁLGEBRA LINEAL (Observatorio) – Año 2016

TRABAJO PRÁCTICO N° 6

Operadores Nilpotentes

1. Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ representado, en la base canónica, por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Demostrar que existen un operador diagonalizable D sobre $\mathbb{R}^3$ y un operador nilpotente N sobre $\mathbb{R}^3$ tales que $T = D + N$, y $D\,N = N\,D$. Hallar las matrices de D y N en la base canónica.

2. Probar que si N es un operador lineal nilpotente sobre un espacio de dimensión n, entonces el polinomio característico de N es $p(x) = x^n$.

Subespacios Cíclicos

1. Sea $T \in End_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (-y + z, x + z, 3\,z)$. Encontrar el subespacio T-cíclico de $\mathbb{R}^3$ generado por $e_1 = (1, 0, 0)$.

2. Sea $T \in End_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ representado en la base canónica por la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Encontrar el subespacio T-cíclico generado por el vector $v = (1, -1, 3)$.

   (b) Decidir si T es o no cíclico. Justificar.

3. Construir una matriz que represente un endomorfismo no cíclico de $\mathbb{R}^3$.

Forma de Jordan

1. (a) Sea $T \in End_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^3$ dado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

   Encontrar la forma de Jordan de A y una base $\mathcal{B}$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ está en tal forma.

   (b) Idem anterior si $T \in End_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$ está dado por la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Determinar las posibles formas de Jordan de una matriz 5×5 cuyo polinomio minimal es $m_T(x) = (x-2)^2$.

3. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
la matriz de un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Establecer si A es o no diagonalizable.

   (b) ¿Existe una matriz de Jordan semejante a A? En caso afirmativo, decir cual es y dar la correspondiente matriz cambio de base.

4. Sea T un operador $\mathbb{R}$-lineal sobre $\mathbb{R}^4$ tal que su polinomio característico es
$$p_T(x) = (x+1)^2(x-2)x.$$

   (a) ¿Cuáles son los posibles polinomios minimales de T? ¿En que casos resulta T diagonalizable? ¿Por qué?

   (b) Si T no es diagonalizable, ¿cuál es la forma de Jordan asociada a T?

5. Sea T un operador $\mathbb{C}$-lineal sobre $\mathbb{C}^5$ tal que su polinomio característico es
$$p_T(x) = (x+4)^2(x-\pi)^2(x-i).$$

   (a) ¿Cuáles son los posibles polinomios minimales de T? ¿En que casos resulta T diagonalizable sobre $\mathbb{C}$? Justificar utilizando propiedades del minimal.

   (b) Si $m_T(x) = (x+4)(x-\pi)^2(x-i)$, ¿cuál es la forma de Jordan asociada a T? Justificar.

6. Sea T un operador $\mathbb{C}$-lineal sobre $\mathbb{C}^9$ tal que su polinomio característico es
$$p_T(x) = (x+3)^3(x-2i)^4(x-4i)^2.$$

   (a) ¿Cuántos posibles polinomios minimales de T hay?

   (b) Si T es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$, ¿cuál es el polinomio minimal de T? Justificar utilizando propiedades del minimal.

   (c) Si $m_T(x) = (x+3)^2(x-2i)^3(x-4i)$, ¿cuál es la forma de Jordan asociada a T? Justificar.