ÁLGEBRA LINEAL (Observatorio) – Año 2016

TRABAJO PRÁCTICO N° 7

Funcionales Lineales. Espacio Dual

1. En $\mathbb{R}^3$, sean $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -2)$, $v_3 = (-1, -1, 0)$.

   a) Si f es un funcional lineal sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $f(v_1) = 1$, $f(v_2) = -1$, $f(v_3) = 3$, calcular cual es el valor de $f(x, y, z)$.

   b) Describir explícitamente un funcional lineal g sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $g(v_1) = g(v_2) = 0$ pero $g(v_3) \neq 0$.

   c) Sea h cualquier funcional lineal tal que $h(v_1) = h(v_2) = 0$ pero $h(v_3) \neq 0$. Si $v = (2, 3, -1)$ probar que $h(v) \neq 0$.

2. En cada caso, encontrar la base dual a la dada:

   a) $\mathcal{B} = \{b_1 = (1, -1, 3), b_2 = (0, 1, -1), b_3 = (0, 3, -2))$ base de $\mathbb{R}^3$;

   b) $\mathcal{B} = \{b_1 = (2i, 0), b_2 = (1 - i, 1)\}$ base de $\mathbb{C}^2$.

3. Sea $V = P_2[t]$ el espacio de polinomios de grado menor o igual que 2 en la indeterminada t, sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

   a) Demostrar que las aplicaciones $p_i : V \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, dadas por:

   $$\begin{aligned} p_1(a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2) &= a_0 - a_1 \\ p_2(a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2) &= a_0 - a_1 + a_2 \\ p_3(a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2) &= -a_0 + 2\, a_1 - a_2 \end{aligned}$$

   forman una base $\mathcal{B}_1$ del espacio dual V^*.

   b) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de V tal que $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_1$.

   c) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, probar que el siguiente es un funcional lineal sobre V:

   $$f(p) = \int_a^b p(t)dt.$$

   d) Dados los funcionales lineales sobre V:

   $$f_1(p) = \int_0^1 p(t)\, dt, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(t)\, dt, \quad f_3(p) = \int_0^{-1} p(t)\, dt$$

   Demostrar que $\{f_1,\, f_2,\, f_3\}$ es una base de V^*, y hallar una base $\mathcal{B}_2$ de V tal que $(B_2)^* = \{f_1,\, f_2,\, f_3\}$.

4. Sean los funcionales lineales $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$; dados por:

   $$\begin{aligned} f_1(x, y) &= -x + 3y \\ f_2(x, y) &= x - 2y \end{aligned}$$

a) Probar que $\mathcal{B}_1 = \{f_1, f_2\}$ es una base de $(\mathbb{R}^2)^*$.

b) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, tal que $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_1$.

5. Dado V un K-espacio vectorial de dimensión n (K cuerpo), sea $f \in V^*$. Probar que:

   a) $Im(f) = K$;

   b) $\dim N(f) = n - 1$.

6. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Dados f y g funcionales lineales sobre V, supongamos que la función h definida por $h(v) = f(v)g(v)$ también es un funcional lineal sobre V. Demostrar que $f = 0$ ó $g = 0$.

Subespacio Anulador

1. Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 2, -3, 4)$ y $(0, 1, 4, -1)$. Hallar una base de S°.

2. Sea S la recta dada por:
$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z &= 0 \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z &= 0 \end{cases}$$
   con a, b, c, a', b', $c' \in \mathbb{R}$. Calcular la dimensión de S (como subespacio de $\mathbb{R}^3$) y encontrar una base para S°.

3. Consideremos a $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Sea W el subespacio de $M_2(\mathbb{R})$ que consta de todas las matrices $A \in M_2(\mathbb{C})$ tales que $AB = 0$. Sea $f \in W^\circ$ y supongamos que
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \text{y} \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 3.$$
   Calcular $f(B)$ y $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$, siendo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

4. Sea W el subespacio solución del sistema homogéneo:
$$\begin{cases} x + 2\,y - z &= 0 \\ 2\,x + y + 2\,z &= 0 \\ x - y + 3\,z &= 0 \end{cases}$$
   Encontrar una base de W°.

5. Sea $v_1 = (1, 0, -1, 2)$ y $v_2 = (2, 3, 1, 1)$ y sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por v_1 y v_2. Qué funcionales lineales f:
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$
   están en el anulador de W?

6. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita (K cuerpo). Demostrar:

   a) Si A y B son subconjuntos de V tales que $A \subseteq B$, entonces $B^\circ \subseteq A^\circ$.

b) Dados S y T subespacios de V,

1) $(S+T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$
2) $(S \cap T)^\circ = S^\circ + T^\circ$

7. Para los subespacios S y T de V determinar una base de $(S+T)^0$ y una base de $(S\cap T)^0$

   $V = \mathbb{R}^4$ y $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tal que $x_1 - x_3 = 0$ y $x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$,T=$\langle(2,1,3,1)\rangle$

8. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V (K cuerpo). Probar que $(W^\circ)^\circ$ es isomorfo a W.
   (**Ayuda:** Usar que dim W + dim W° = dim V y dim W° + dim $W^{\circ\circ}$ = dim V^*.)

Aplicación traspuesta

Sean V y W dos K-espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. La *traspuesta de* T es la función $T^t : W^* \to V^*$ que aplica a un funcional $f \in W^*$ en el funcional $T^t(f) \in V^*$ definido por

$$(T^t(f))(v) = f(T(v)), \quad \text{para todo } v \in V.$$

1. Probar que T^t está bien definida y que es una aplicación lineal.

2. Pruebe las siguientes propiedades de la trasposición:

   a) $(S+T)^t = S^t + T^t$;
   b) $(\alpha T)^t = \alpha T^t$ para todo $\alpha \in K$.

3. Sean $S : V \to V'$ y $T : V' \to V''$ transformaciones lineales entre K-espacios vectoriales (K cuerpo). Probar que:

   a) $Nu(T^t) = (Im(T))^\circ$;
   b) $(id_V)^t = id_{V^*}$;
   c) $(T \circ S)^t = S^t \circ T^t$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y) = (x+y, y-z, -x+z)$. Calcular $f^t(\varphi)$ siendo $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ el funcional lineal dado por $\varphi(t,u,v) = \frac{1}{2}t - 4u + 3v$.

5. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por $g(x,y) = (x+y, x, x-2y, y)$. Calcular $g^t(\varphi)$ siendo $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ el funcional lineal dado por $\varphi(t,u,v,w) = t - 2u + v + w$.

6. Sea $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por $h(w,x,y,z) = (w-x, w-y, w-z)$. Calcular $h^t(\varphi)$ siendo $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ el funcional lineal dado por $\varphi(t,u,v) = 3t + 4u - v$.