ÁLGEBRA LINEAL (Observatorio) – Año 2016

TRABAJO PRÁCTICO N° 8

Espacios Vectoriales con Producto Interno

1. (a) Verificar que el siguiente es un producto interno en $\mathbb{R}^2$ y escribirlo en forma matricial:

$$\langle\, (x_1, x_2), (y_1, y_2)\, \rangle = x_1\, y_1 - x_1\, y_2 - x_2\, y_1 + 3\, x_2\, y_2$$

   (b) Hallar la norma de $v = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$ con respecto a:
      i. el producto interno canónico,
      ii. el producto interno dado en (a).

2. Consideremos a $\mathbb{R}^2$ dotado con el producto interno usual. Sean $v_1 = (1, 2)$ y $v_2 = (-1, 1)$.
   (a) ¿Existe algún vector $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $\langle\, v_1, w\, \rangle = -1$ y $\langle\, v_2, w\, \rangle = 3$? ¿Hay más de uno?
   (b) Demostrar que para cada $v \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $v = \langle\, v, e_1\, \rangle .e_1 + \langle\, v, e_2\, \rangle .e_2$, siendo $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

3. (a) Sea V el espacio vectorial de las funciones continuas de $[0\ 1]$ en $\mathbb{R}$. Probar que la aplicación de $V \times V$ en $\mathbb{R}$ dada por:

$$\langle\, f, g\, \rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

   es un producto interno.
   (b) Sean $f(t) = t + 2$ y $g(t) = t^2 - 2\,t - 3$. Calcular $\langle\, f, g\,\rangle$, $\|f\|$ y $\|g\|$ con respecto al producto interno dado en (a).

4. Sean $d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{R}^+$ y consideremos la aplicación de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}$ dada por:

$$\langle\, (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\, \rangle = \sum_{i=1}^{n} d_i\, x_i \overline{y_i}.$$

   Verificar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno sobre $\mathbb{C}^n$ y escribirlo en forma matricial.

5. Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ una transformación lineal. Establecer si $[\ ,\ ] : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por:

$$[\, (z_1, z_2), (w_1, w_2)\,] = T(z_1, z_2)\, \overline{T(w_1, w_2)}$$

   es un producto interno sobre $\mathbb{C}^2$.

6. Sea V un K-espacio vectorial (de dimensión finita) con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Sea $T \in End_K V$ biyectivo y consideremos la aplicación de $V \times V$ en K dada por:

$$[\, x, y\,] = \langle\, Tx, Ty\, \rangle\,, \qquad \text{para todo } x, y \in V.$$

   Probar que $[\ ,\ ]$ también es un producto interno sobre V.

7. Calcular la distancia entre los siguientes vectores:

   (a) $u = (2,\, i,\, 1-i)$, $v = (-i,\, 0,\, 4\,i)$ en $\mathbb{C}^3$ con el producto interno canónico.

   (b)
   $$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \;,\; B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}$$
   en $M_2(\mathbb{C})$ con el producto interno dado por $\langle\, A, B\,\rangle = \mathrm{tr}(A.B^*)$, siendo B^* la matriz traspuesta conjugada de B.

8. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Demostrar que la norma $\|\;\|$ determinada por el producto interno cumple la "ley del paralelogramo": dados $v, w \in V$,
   $$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

Complemento ortogonal

1. (a) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por $\{(1,2,3,-1,2),\, (2,4,7,2,-1)\}$, encontrar una base del complemento ortogonal $W^\perp$ de W.

   (b) Si $W = \{(x,y,z) \;:\; 3\,x - i\,y + 2i\,z = 0\}$, hallar el complemento ortogonal del subespacio $W \subseteq \mathbb{C}^3$ con respecto al producto interno canónico.

2. En $\mathbb{R}^3$ (dotado con el producto interno canónico) hallar una base ortogonal que contenga al vector $u = (1,-1,2)$.

3. Sea $\mathcal{B} = \{(1,0,1),\, (2,0,1),\, (1,1,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Considerando sobre $\mathbb{R}^3$ el producto interno canónico, utilizar Gram-Schmidt para hallar, a partir de $\mathcal{B}$, una base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ que sea ortonormal. Calcular las coordenadas de $v = (2,-1,3)$ en la base $\mathcal{B}'$.

4. Sea
   $$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Hallar una base ortonormal de autovectores de A.

   (b) Hallar una matriz P ortogonal tal que $P^t\,A\,P$ sea diagonal.

5. Sea
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Hallar una base ortonormal de autovectores de A.

   (b) Hallar una matriz P ortogonal tal que $P^t\,A\,P$ sea diagonal.

Operador Adjunto

1. Considerando en $\mathbb{R}^2$ el producto interno
   $$\langle\,(x_1,x_2),(y_1,y_2)\,\rangle = x_1\,y_1 - 2\,x_1\,y_2 - 2\,x_2\,y_1 + 8\,x_2\,y_2$$
   y $T \in End_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$ dado por $T(x_1,x_2) = (2\,x_1 - x_2, x_1 + x_2)$, calcular el adjunto de T.

2. Si $T \in End_K V$ y W es subespacio T-invariante de V, probar que $W^{\perp}$ es T^*-invariante.

3. Sea V un $\mathbb{C}$ espacio vectorial con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ y sea $T \in End_{\mathbb{C}} V$. Probar que, si λ es un autovalor de T entonces $\overline{\lambda}$ es un autovalor de T^*.

4. Sea V un espacio vectorial (de dimensión finita) con producto interno y sean $S, T \in End_K V$. Si $k \in K$, probar:

   (a) $(S+T)^* = S^* + T^*$

   (b) $(k\,T)^* = \overline{k}\,T^*$

   (c) $(S\,T)^* = T^*\,S^*$

5. Sea V un $\mathbb{C}$ espacio vectorial con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ y sea $T \in End_{\mathbb{C}} V$ autoadjunto. Probar que:

   (a) Si λ es un autovalor de T entonces $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) Si v_i es un autovector asociado al autovalor λ_i de T (para $i = 1, 2$) y $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $\langle\, v_1, v_2 \,\rangle = 0$.

6. Establecer si los siguientes endomorfismos definidos sobre $\mathbb{R}^3$ son autoadjuntos:

   (a) $T(x, y, z) = (x + y, x, -z)$

   (b) $S(x, y, z) = (-2\,x + 2\,z, y, 2\,x)$

Operadores Unitarios

1. Sea U un endomorfismo unitario sobre V y sea $W \subseteq V$ un subespacio U-invariante. Probar que $W^{\perp}$ es U-invariante.

2. Sea V un espacio vectorial con producto interno (de dimensión finita) y sea W un subespacio de V. Sabemos que $V = W \oplus W^{\perp}$, luego si $v \in V$, entonces $v = w + w'$, con $w \in W$ y $w' \in W^{\perp}$. Sea J el operador lineal dado por $J(v) = w - w'$.

   (a) Demostrar que J es autoadjunto y unitario.

   (b) Si $V = \mathbb{R}^3$ (con el producto interno canónico) y W es el subespacio generado por $(1, 0, 1)$, hallar la matriz de J en la base ordenada canónica.

3. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con producto interno (de dimensión finita) y sea $T \in End_{\mathbb{C}} V$ tal que $T = T^* = T^{-1}$. Probar que:

   (a) los únicos autovalores de T son $\lambda_+ = 1$ y $\lambda_- = -1$;

   (b) existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que la representación matricial de T es:

$$J = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$