ÁLGEBRA LINEAL (Observatorio) – Año 2016

TRABAJO PRÁCTICO N° 9

Formas Bilineales

1. Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ y $A \in End_{\mathbb{R}}V$.

   (a) Si $\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{R}$ está definida por
   $$\mathcal{A}(x, y) = \langle\, Ax, y\,\rangle\,, \quad x, y \in V,$$
   probar que $\mathcal{A}$ es una forma bilineal sobre V.

   (b) Si $\mathcal{B} : V \times V \to \mathbb{R}$ está definida por $\mathcal{B}(x, y) = \langle\, x, Ay\,\rangle$, $x, y \in V$, probar que $\mathcal{B}$ es una forma bilineal sobre V.

   (c) Si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, ¿$\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son bilineales? ¿Por qué?

2. ¿Cuáles de las siguientes funciones $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son bilineales?

   (a) $\mathcal{A}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 1$;

   (b) $\mathcal{A}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 - y_1)^2 + x_2y_2$;

   (c) $\mathcal{A}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 + y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2$;

   (d) $\mathcal{A}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$.

   Hallar la matriz de $\mathcal{A}$ en la base canónica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ en los casos en que corresponda.

3. Sea $\mathcal{A}$ la forma bilineal sobre $\mathbb{R}^3$ definida por $\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Hallar la matriz de $\mathcal{A}$ en cada una de las siguientes bases:
   $$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}, \quad \mathcal{B}_1 = \{(1, -1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}, \quad \mathcal{B}_2 = \{(1, 2, 3), (1, 0, 0), (0, 4, 5)\}.$$

4. Sea $M_n(\mathbb{C})$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de todas las matrices de $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. Demostrar que $\mathcal{T} : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definida por
   $$\mathcal{T}(A, B) = n\,\mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$$
   es una forma bilineal sobre $M_n(\mathbb{C})$ ¿$\mathcal{T}$ es simétrica?

5. Sea V un K-espacio vectorial (K cuerpo). Probar que toda forma bilineal $\mathcal{A} : V \times V \to K$ puede ser representada como la suma de una forma bilineal simétrica y una forma bilineal antisimétrica.

6. Sea $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal dada por
   $$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + x_1y_3 + 4x_2y_1 + x_2y_2 + 6x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_2 + x_3y_3.$$
   ¿$\mathcal{A}$ es simétrica? ¿$\mathcal{A}$ es antisimétrica? Encontrar una forma bilineal simétrica $\mathcal{B}$ y otra antisimétrica $\mathcal{C}$ tales que $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \mathcal{C}$.

Formas Cuadráticas

1. Las siguientes expresiones definen formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}^2$. Hallar la forma bilineal simétrica asociada en cada caso:

   (a) $\mathcal{Q}(x_1, x_2) = \alpha x_1^2$ con $\alpha \in \mathbb{R}$;

   (b) $\mathcal{Q}(x_1, x_2) = \beta x_1 x_2$ con $\beta \in \mathbb{R}$;

   (c) $\mathcal{Q}(x_1, x_2) = \gamma x_2^2$ con $\gamma \in \mathbb{R}$;

   (d) $\mathcal{Q}(x_1, x_2) = 2x_1^2 - \frac{1}{3}x_1 x_2$;$\mathrm{Q}(\mathrm{x}_1, x_2) = 3x_1 x_2 - x_2^2$.

(2) Hallar la matriz, en la base canónica, de cada una de las formas bilineales determinadas en el Ejercicio 1.

3. Sea $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal dada por

$$\mathcal{A}(\vec{x}, \vec{y}) = 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + x_1y_3 + 4x_2y_1 + x_2y_2 + 6x_2y_3 + x_3y_1 + 2x_3y_2 + x_3y_3.$$

   Hallar la forma cuadrática asociada $\mathcal{Q}$ y la única forma bilineal simétrica $\mathcal{S}$ que la genera.

4. Hallar la forma canónica asociada a cada una de las siguientes formas cuadráticas:

   (a) $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{Q}(x, y) = 2bxy, \quad b \in \mathbb{R}$;

   (b) $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{Q}(x, y, z) = xy + 2xz + z^2$.

   Indicar en cada caso la base ortonormal utilizada.

5. Reducir la forma cuadrática $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{Q}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4xz$ a la forma canónica, mediante una base ortonormal.

6. Hallar los índices de inercia de la forma cuadrática dada por

$$\mathcal{Q}(\vec{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

   <u>Sugerencia</u>: Considerar el cambio de base

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2 \\ x_3 &= y_3 + y_4 \\ x_4 &= y_3 - y_4 \end{cases}$$

Formas Cuadráticas Definidas

1. Demostrar que la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathcal{Q}(x, y, z) = 2x^2 - 2xy + y^2 + 4xz - 6yz + 11z^2$$

   es definida positiva.

2. Determinar los valores de α para los cuales la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathcal{Q}(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 2\alpha xy + 2\alpha yz$$

   es definida positiva.

3. Determinar los valores de β para los cuales la forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$ dada por

$$\mathcal{Q}(x, y, z, t) = \beta x^2 + 2xy + \beta y^2 + \beta z^2 + 2zt + \beta t^2$$

es definida negativa.

La matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ asociada (en una base $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots b_n\}$) a una forma cuadrática $\mathcal{Q} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ definida positiva (resp. definida negativa) se denomina **matriz definida positiva** (resp. definida negativa).

4. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz definida positiva. Probar que:

   (a) Si $C \in M_n(\mathbb{C})$ entonces C^*AC es definida positiva.

   (b) Si λ es autovalor de A entonces $\lambda > 0$.

5. Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matriz definida negativa. Probar que:

   (a) Si $C \in M_n(\mathbb{C})$ entonces C^*AC es definida negativa.

   (b) Si λ es autovalor de A entonces $\lambda < 0$.

6. Determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$, cuya matriz se da a continuación, es definida positiva:

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} a & 2b & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$