Capítulo 1

Geometría del espacio y del plano

1.1 Sistema de coordenadas cartesianas y vectores en el plano

Cuando se estudia un objeto físico (por ejemplo un auto o la molécula de ADN, un líquido en una pipeta o sangre fluyendo en una arteria, la energía liberada en cierta reacción química, etc), uno está interesado en describir sus propiedades (características del objeto, como la masa o la densidad) y su estado (situación en la que se encuentra, como la temperatura o la velocidad). Las propiedades y los estados se representan por medio de magnitudes que se pueden medir. Algunas magnitudes como la masa o la presión son llamadas ***magnitudes escalares*** *pues consisten de un número real (un escalar) y una unidad de medida* [1]*. Otras magnitudes requieren más de un número y unidad para quedar bien definidas. Éste es el caso, por ejemplo, cuando se quiere describir el desplazamiento de una persona para ir -digamos- desde la terminal de ómnibus de La Plata hasta un aula del segundo piso de nuestra Facultad donde se dicta Análisis Matemático II. Necesitamos utilizar segmentos "orientados" (denominados vectores), esto es, tramos con una dirección, sentido y "largo" dados. Las magnitudes como el desplazamiento o la velocidad son llamadas* ***magnitudes vectoriales*** *pues actúan como los vectores.*

Recordemos, entonces, cómo se definen y cómo se opera matemáticamente con vectores. Empezamos en primer lugar por plantear un sistema cartesiano de coordenadas, que nos sirve como referencia para ubicar la posición de un objeto y para ver el cambio relativo de su posición, o sea, su desplazamiento.

Sistema de coordenadas cartesianas tridimensional

Consta de un punto fijo u *origen de coordenadas* O, y tres rectas o *ejes coordenados* x, y y z que pasan por O y son perpendiculares entre sí; los semiejes positivos se orientan de acuerdo a la *regla de la mano derecha* (o sentido de avance de un tornillo). Quedan determinados tres planos coordenados: xy, yz y xz; y el espacio queda dividido en ocho *octantes*.

---

[1]En las actividades y problemas de aplicación se indicarán las unidades de medida. Salvo que se indique otra cosa, adoptaremos las unidades del sistema MKS, donde se expresan las medidas utilizando como unidades fundamentales el metro (m) para la longitud, el kilogramo (kg) para la masa, y el segundo (s) para el tiempo.

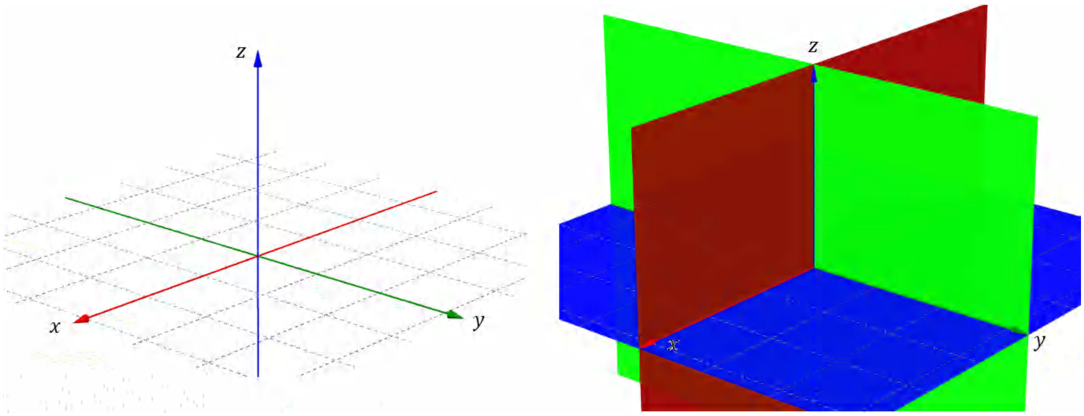


Figura 1.1: Ejes cartesianos y planos cartesianos en el espadio.

Denotamos un punto en el espacio por $P(x, y, z)$ o simplemente por la terna ordenada (x, y, z), donde los números reales x, y y z se llaman *coordenadas cartesianas* del punto P. Se designa con $\mathbb{R}^3$ al conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales, que se corresponden con todos los puntos del espacio:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : \; -\infty < x < \infty \,, \; -\infty < y < \infty \,, \; -\infty < z < \infty\}.$$

Dado un punto $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, el punto $P_I(x, y, 0)$ se denomina *proyección* (perpendicular) de P en el plano coordenado xy, mientras que $P_{II}(0, y, z)$ es la proyección de P en el plano coordenado yz, y $P_{III}(x, 0, z)$ es la proyección de P en el plano coordenado xz.
En la Figura 1.2 se muestra un dibujo (en perspectiva) de un sistema de coordenadas tridimensional; el punto indicado como ejemplo es $P(2, 2, 3)$ y sus proyecciones son

$$P_I(2, 2, 0) \quad P_{II}(0, 2, 3) \quad P_{III}(2, 0, 3)$$

Ubique en la figura los puntos $A(1, 1, 3)$ y $B(-1, 3, 2)$.
La distancia entre el origen $O(0, 0, 0)$ y un punto $P(x, y, z)$ es

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

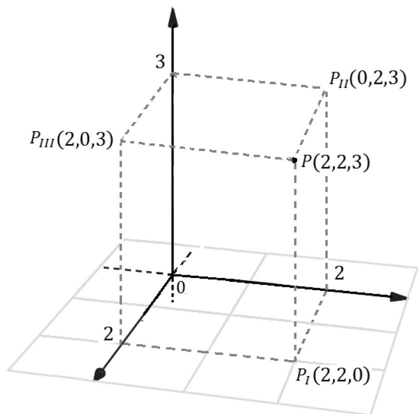


Figura 1.2: Sistema de coordenadas cartesianas tridimensional (primer octante).

La distancia entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Es una cantidad escalar y es positiva o nula: $d(P_1, P_2) \geq 0$. En la Figura 1.3 la distancia entre O y $P(2, 2, 3)$ vale $d(O, P) = \sqrt{17}$ m (agregamos como unidad de medida el metro, suponiendo que trabajamos en el sistema MKS). Calcule la distancia entre los puntos $A(1, 1, 3)$ y$B(-1, 3, 2)$.

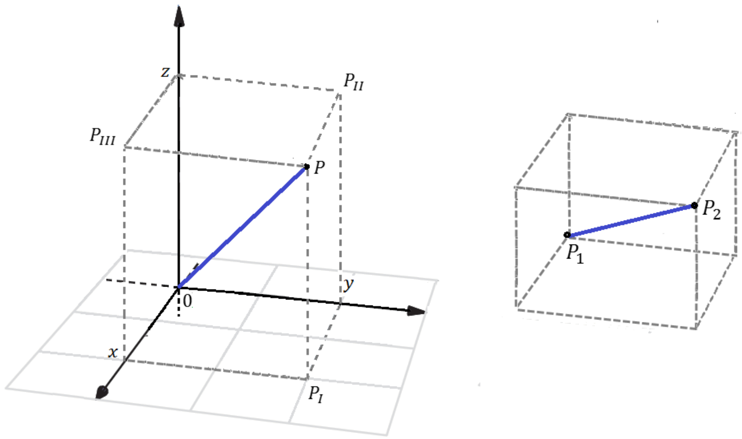


Figura 1.3: Distancia entre dos puntos en un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional.

■ **Ejemplo 1.1** La ecuación $z = 0$ representa el plano coordenado xy; mientras que $x = 0$ es el plano coordenado yz; e $y = 0$ es el plano coordenado xz. La desigualdad $z > 0$ representa el semiespacio superior. Si tomamos aquellos puntos tales que $x > 0, y > 0, z > 0$, nos estamos refiriendo al primer octante. El par de ecuaciones $y = 0, z = 0$ representa el eje coordenado x; mientras que $x = 0, z = 0$ indican el eje coordenado y; y $x = 0, y = 0$ dan el eje coordenado z.

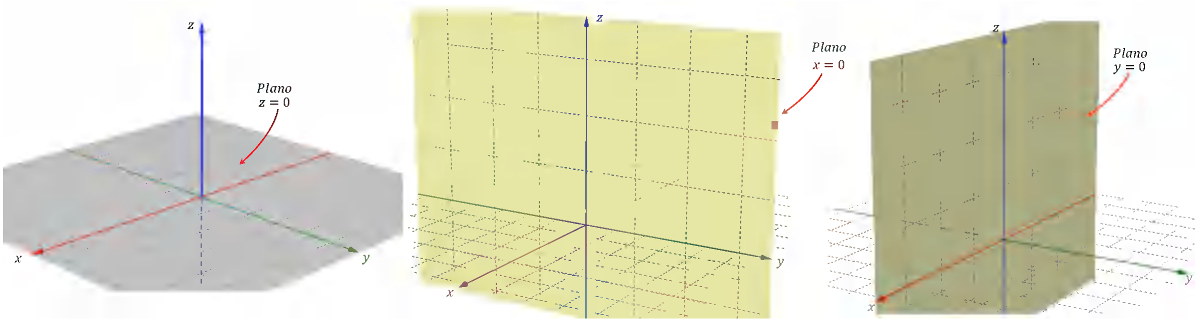


Figura 1.4: Cada plano coordenado con su correspondiente ecuación.

■

Veamos ahora, a través de algunos ejemplos, diferentes tipos de regiones en el espacio:

■ **Ejemplo 1.2** **Sólidos**. Consideremos el conjunto E de todos los puntos $P(x, y, z)$ del espacio que distan del origen en 3 o menos unidades, luego sus coordenadas satisfacen la desigualdad $d(O, P) \leq 3$, esto es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 3$, que también se puede expresar como $x^2+y^2+z^2 \leq 9$; su representación gráfica es el sólido dado por la esfera de radio 3 centrada en O. ¿Qué sólido B representa la desigualdad $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 < 16$? Notar que B no tiene borde (o frontera) por lo cual se dice que es una *región sólida abierta*, mientras que la esfera E es una *región sólida cerrada*. ■

■ **Ejemplo 1.3 Superficies**. La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ corresponde a la superficie esférica S formada por todos los puntos que se encuentran exactamente a 2 unidades del origen. Por otro lado, la ecuación $z = 3$ indica que de todo el espacio sólo se debe considerar el conjunto Π de puntos de la forma $(x, y, 3)$, siendo x e y cualesquiera, por lo tanto se refiere a la superficie dada por un plano horizontal (paralelo al plano xy), a altura 3. Se dice que la superficie esférica S es una *superficie cerrada* (y encierra un sólido en su interior), mientras que el plano Π es una *superficie abierta*. ■

■ **Ejemplo 1.4 Curvas**. Todas las ternas (x, y, z) que satisfacen el par de ecuaciones $x^2+y^2+z^2 = 1$ y $x = 0$, corresponden gráficamente a la intersección entre una superficie esférica y un plano dando lugar a la curva C que es la circunferencia de radio 1 centrada en O contenida en el plano yz. Otro ejemplo es el conjunto de puntos tales que $x = 2$, $y = 2$, para cualquier z, que corresponde a la recta L paralela al eje z y que pasa, por ejemplo, por $P(2, 2, 3)$. La circunferencia C es una *curva cerrada*, mientras que la recta L es una *curva abierta*. ■

C Esboce a mano alzada las gráficas de las regiones sólidas E y B, las superficies S y Π, y las curvas C y L.

Vectores en el espacio

Denotamos un vector en el espacio como $\vec{v}$ (con una flechita arriba) ó $\mathbf{v}$ (en negrita), y en *componentes* mediante una terna ordenada como $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, donde v_1, v_2 y v_3 son números reales. Otra notación para vectores (trabajada en Álgebra) proviene de la correspondencia bi-unívoca entre estos objetos y matrices columna en $\mathbb{R}^{3\times1}$: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Se designa con V_3 al conjunto de vectores del espacio.

Un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in V_3$ se puede representar gráficamente mediante un segmento orientado o "flecha" en el espacio; la *dirección*, *sentido* y *magnitud* del segmento caracterizan al vector. La flecha va desde un punto cualquiera tomado como *punto inicial* o *de aplicación* $A(a_1, a_2, a_3)$ hasta un *punto final* o *terminal* $B(b_1, b_2, b_3)$, donde $v_1 = b_1 - a_1$, $v_2 = b_2 - a_2$ y $v_3 = b_3 - a_3$; luego se escribe $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. El punto de aplicación del vector puede ser cualquiera; en particular, si se elige el origen de coordenadas O como punto inicial, se dice que el vector está en *posición canónica* y se escribe $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, donde $P(x, y, z)$ es el punto final del vector. Observamos entonces que hay una correspondencia bi-unívoca entre un vector $\overrightarrow{OP}$ de V_3 (ubicado en posición canónica) y un punto P de $\mathbb{R}^3$; utilizaremos esta biyección para identificar una terna ordenada con un vector o con un punto, según nos resulte más conveniente. En la Figura 1.5 se muestra el vector $\vec{v} = (2, 2, 3)$ aplicado en $A(1, 1, 3)$ y aplicado en el origen; este último, que va de O al punto $P(2, 2, 3)$, es el representante del vector en posición canónica y lo denotamos por $\vec{r}$.

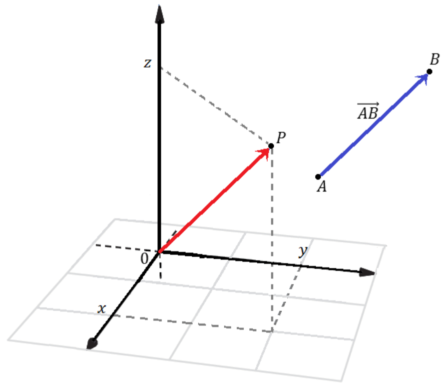


Figura 1.5: $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ son representantes del vector $\vec{v} = (x, y, z) \in V_3$.

Vector nulo

$\vec{0} = (0, 0, 0) \in V_3$. Se representa mediante un punto en el espacio (el punto inicial y el punto final coinciden); en posición canónica es el origen de coordenadas; no tiene una dirección definida, y su magnitud es cero.

Vectores base unitarios o *versores básicos en* V_3

$\breve{\imath} = (1, 0, 0)$, $\breve{\jmath} = (0, 1, 0)$ y $\breve{k} = (0, 0, 1)$ (se denotan con una pequeña "U" sobre la letra). Se representan gráficamente por medio de segmentos orientados de longitud 1, paralelos a los ejes coordenados y apuntando en el sentido positivo de los ejes. En la Figura 1.6 se muestran los versores básicos ubicados en posición canónica: $\breve{\imath}$ es la flecha que va del origen al punto $P_1(1, 0, 0)$, $\breve{\jmath}$ va del origen a $P_2(0, 1, 0)$, y $\breve{k}$ del origen a $P_3(0, 0, 1)$.

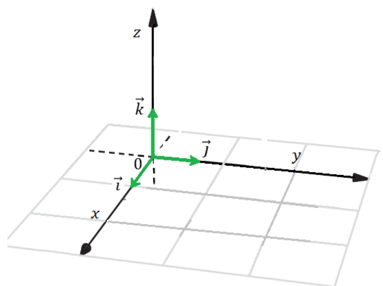


Figura 1.6: Versores básicos de V_3: $\breve{\imath} = (1, 0, 0)$, $\breve{\jmath} = (0, 1, 0)$, $\breve{k} = (0, 0, 1)$.

■ **Ejemplo 1.5** Para analizar el movimiento de un par de objetos en el espacio, un observador fija un sistema coordenado como referencia. Está interesado en saber hacia dónde y cuánto se desplazan los objetos. Mide para uno de los objetos que el punto inicial es $A(1, 2, 3)$ y el punto final es $B(1, 5, 8)$. El otro objeto está inicialmente en el origen de coordenadas O del sistema de referencia y se mueve hasta el punto $P(0, 3, 5)$. ¿Cómo está dado el desplazamiento de cada objeto?

El observador afirma que el desplazamiento del primer objeto está dado por el vector $\overrightarrow{AB} = (1 - 1, 5 - 2, 8 - 3) = (0, 3, 5)$, y para el otro objeto por el vector $\overrightarrow{OP} = (0, 3, 5)$. Ambos desplazamientos son *equivalentes*: 3 unidades hacia un lado y 5 unidades hacia arriba. ■

Ejercicios

1. Para fijar ideas mientras esté en clase, elija un punto del aula como origen de coordenadas, 3 líneas como ejes coordenados, y 3 paredes (o piso) como planos coordenados. Utilizando como unidad de medida el metro (más o menos un paso largo): a) estime las coordenadas de una de las teclas de luz, de una tiza que encuentre caída en el piso, de una tiza en el pizarrón, de una de sus manos, y de su goma de borrar (si tiene); b) si la goma cae al piso, ¿cuál será su ubicación (antes de recogerla)?; c) calcule la distancia entre su mano y la goma en el piso, y entre su mano y la tecla de luz.
2. En un sistema coordenado tridimensional ubique los puntos $Q(1,1,0)$, $R(2,-1,3)$ y $S(1,1,3)$. Calcule las distancias entre ellos.
3. ¿Qué representa $z = 3$? ¿Y $z = 3, x = 2$? ¿Y $z \leq 3$? Grafique.
4. Exprese como igualdades o desigualdades los siguientes conjuntos de puntos en el espacio:
   a) los puntos del primer octante;
   b) los puntos de un casquete esférico interiores a una superficie esférica de radio 4 y exteriores a la esfera de radio 2, centradas ambas en el origen;
   c) los puntos que están a altura 3, con las otras dos componentes de distinto signo entre sí;
   d) los puntos que distan de $(1,2,3)$ en exactamente 5 unidades;
   e) el o los puntos, si existen, tales que su proyección en el plano xy es el $(2,3,0)$ y en el plano yz es el (0,3,5).
5. Explique con sus palabras qué regiones del espacio representan las siguientes relaciones:
   a) $xy > 0, z = -3$
   b) $xyz > 0$
   c) $xyz = 0$
   d) $x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1$
6. Halle las coordenadas del centro y el radio de la superficie esférica $x^2+y^2+z^2-2x+6y+8z+1 = 0$. Grafique.
7. Exprese en componentes el vector que va del punto $(-1,2,3)$ al punto $(3,3,4)$ y encuentre su representante en posición canónica. Idem si el punto inicial es $(2,-1,-2)$ y el punto final es $(-4,3,7)$.
8. Para los puntos del Ejercicio 2, obtenga $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RS}$ y $\overrightarrow{QS}$, y señálelos en el gráfico. ¿Qué puede decir del "largo" de estos vectores?

1.2 Sistema de coordenadas cartesianas y vectores en el plano

Volviendo a los comentarios introductorios de la sección anterior, supongamos que se quiere describir el desplazamiento de una persona para ir desde la estación de trenes de La Plata hasta la oficina de Alumnos de nuestra Facultad. Claramente, la coordenada vertical no es relevante para analizar este problema y podemos tratar la situación "modelando" en un plano (el plano del piso), utilizando un sistema de coordenadas bidimensional y vectores con dos componentes.

Sistema de coordenadas cartesianas bidimensional

Consta de un punto fijo u *origen de coordenadas* O, y dos rectas o *ejes coordenados* x e y que pasan por O y son perpendiculares entre sí; los semiejes positivos se orientan en *sentido antihorario* (o sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj). El plano queda dividido en cuatro *cuadrantes*.

Denotamos un punto en el plano por $P(x,y)$ o simplemente por el par ordenado (x,y), donde el número real x es la *coordenada cartesiana* x o *abscisa*, y el número real y es la *coordenada cartesiana* y u *ordenada* del punto P. Se designa con $\mathbb{R}^2$ al conjunto de todos los pares ordenados de números reales, que se corresponden con todos los puntos del plano:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : -\infty < x < \infty\,,\ -\infty < y < \infty\}.$$

Dado un punto $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$, el punto $P_I(x, 0)$ es la *proyección* (perpendicular) de P en el eje coordenado x, mientras que $P_{II}(0, y)$ es la proyección de P en el eje coordenado y. En la Figura 1.7 se muestra un dibujo de un sistema de coordenadas bidimensional; el punto indicado como ejemplo es $P(1, 2)$ y sus proyecciones son $P_I(1, 0)$ y $P_{II}(0, 2)$. Ubique en la figura los puntos $A(-2, 3)$ y $B(3, 2)$.
La distancia entre el origen $O(0, 0)$ y un punto $P(x, y)$ es

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La distancia entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

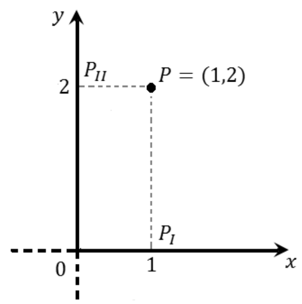


Figura 1.7: Sistema de coordenadas cartesianas bidimensional (primer cuadrante).

En la Figura 1.8 la distancia entre O y $P(1, 2)$ vale $d(O, P) = \sqrt{5}$ m. Calcule la distancia entre los puntos $A(-2, 3)$ y $B(3, 2)$.

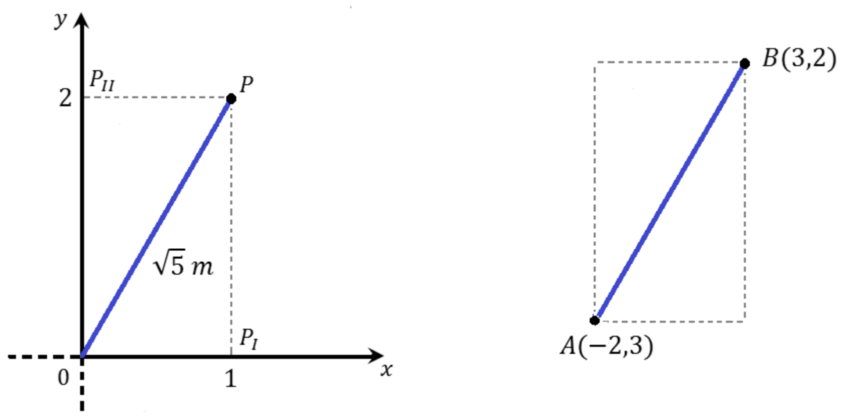


Figura 1.8: Distancia entre dos puntos en un sistema de coordenadas cartesianas bidimensional.

■ **Ejemplo 1.6** La ecuación $y = 0$ representa el eje coordenado x; mientras que $x = 0$ es el eje coordenado y. La desigualdad $y > 0$ representa el semiplano superior; mientras que $x > 0$ indica el semiplano derecho. Si tomamos aquellos puntos tales que $x > 0$, $y > 0$, nos estamos refiriendo al primer cuadrante. ■

Veamos ahora, a través de algunos ejemplos, diferentes tipos de regiones en el plano:

■ **Ejemplo 1.7 Regiones planas**: Consideremos el conjunto D de todos los puntos $P(x, y)$ del plano que distan del origen en 3 o menos unidades, luego sus coordenadas satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 \leq 9$; su representación gráfica es la región plana dada por el círculo de radio 3 centrado en O. ¿Qué región R representa la desigualdad $(x-1)^2+(y-2)^2 < 16$? Notar que R no tiene borde (o frontera) por lo cual se dice que es una *región plana abierta*, mientras que el círculo D es una *región plana cerrada*. ■

■ **Ejemplo 1.8 Curvas** Todos los pares (x, y) que satisfacen la ecuación $x^2+y^2=1$, corresponden gráficamente a la curva C que es la circunferencia de radio 1 centrada en O. Otro ejemplo es el conjunto de puntos tales que $y=2$, para cualquier x, que corresponde a la recta L paralela al eje x y que pasa, por ejemplo, por $P(1,2)$. La circunferencia C es una *curva cerrada*, mientras que la recta L es una *curva abierta*. ■

C Esboce a mano alzada las gráficas de las regiones planas D y R, y las curvas C y L.

Vectores en el plano

Denotamos un vector en el plano como $\vec{v}$ ó $\mathbf{v}$, y en *componentes* mediante un par ordenado como $\vec{v}=(v_1,v_2)$, donde v_1 y v_2 son números reales. Otra notación para vectores proviene de la correspondencia bi-unívoca entre estos objetos y matrices columna en $\mathbb{R}^{2\times 1}$: $\vec{v}=(v_1,v_2)\leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.
Se designa con V_2 al conjunto de vectores del plano.
Un vector $\vec{v}=(v_1,v_2)\in V_2$ se puede representar gráficamente mediante un segmento orientado o "flecha" en el plano. La flecha va desde un punto cualquiera tomado como *punto inicial* o *de aplicación* $A(a_1,a_2)$ hasta un *punto final* o *terminal* $B(b_1,b_2)$, donde $v_1=b_1-a_1$ y $v_2=b_2-a_2$; luego se escribe $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$. El punto de aplicación del vector es arbitrario; en particular, si se elige el origen de coordenadas $O(0,0)$ como punto inicial, se dice que el vector está en *posición canónica* y se escribe $\vec{r}=\overrightarrow{OP}=(x,y)$, donde $P(x,y)$ es el punto final del vector. Observamos entonces que hay una correspondencia bi-unívoca entre un vector $\overrightarrow{OP}$ de V_2 (ubicado en posición canónica) y un punto P de $\mathbb{R}^2$; utilizaremos esta biyección para identificar un par ordenado con un vector o con un punto, según nos resulte más conveniente. En la Figura 1.9 se muestra el vector $\vec{v}=(1,3)$ aplicado en $A(1,2)$ y aplicado en el origen; este último, que va de O al punto $P(1,3)$, es el representante del vector en posición canónica y lo denotamos por $\vec{r}$.

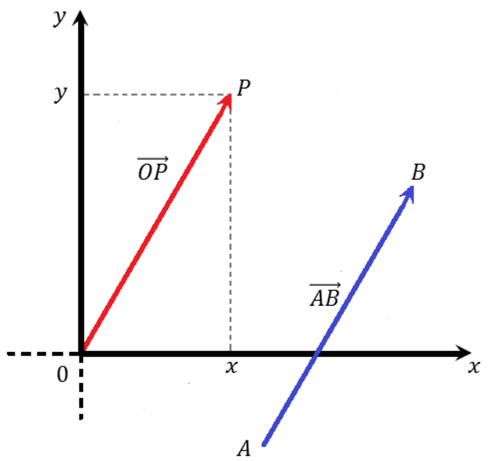


Figura 1.9: $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$ son representantes del vector $\vec{v}=(x,y)\in V_2$.

Vector nulo

$\vec{0} = (0,0) \in V_2$. Se representa mediante un punto en el plano (el punto inicial y el punto final coinciden); en posición canónica es el origen de coordenadas.

Vectores base unitarios o *versores básicos* en V_2

$\check{\imath} = (1,0)$ y $\check{\jmath} = (0,1)$. Se representan gráficamente por medio de segmentos orientados de longitud 1, paralelos a los ejes coordenados y apuntando en el sentido positivo de los ejes. En la Figura 1.10 se muestran los versores básicos ubicados en posición canónica: $\check{\imath}$ es la flecha que va del origen al punto $P_1(1,0)$, y $\check{\jmath}$ va del origen a $P_2(0,1)$.

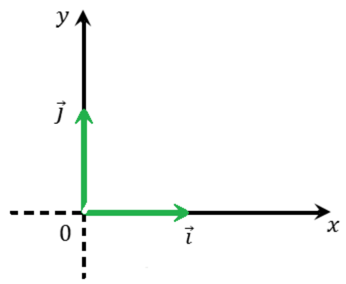


Figura 1.10: Versores básicos de V_2: $\check{\imath} = (1,0)$, $\check{\jmath} = (0,1)$.

Ejercicios

1. En un sistema coordenado bidimensional ubique los puntos $Q(1,1)$, $R(2,-1)$ y $S(0,-\frac{3}{4})$. Calcule las distancias entre ellos.
2. ¿Qué representa $x = 3$? ¿Y $x \leq 3$? Grafique.
3. Justifique la afirmación: La desigualdad $y - x - 2 > 0$ representa una región que es el semiplano por encima de la curva cuya ecuación es $y = x + 2$
4. Exprese como igualdades o desigualdades los siguientes conjuntos de puntos en el plano:
   a) los puntos del semiplano inferior;
   b) los puntos de un corona circular interiores a la circunferencia de radio 5 y exteriores al círculo de radio 3, centrados ambos en el origen;
   c) los puntos que están a altura 3;
   d) los puntos que distan de $(-1,-2)$ en exactamente 2 unidades;
   e) el o los puntos, si existen, tales que su proyección en el eje y es el $(0,-\sqrt{3})$.
5. Explique con sus palabras qué regiones en el plano representan las siguientes relaciones:
   a) $x > 0$
   b) $xy > 0$
   c) $xy = 0$
   d) $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$
   e) $y - x^2 \geq 0$
6. Halle las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$. Grafique.
7. Grafique y exprese en componentes el vector que va del punto $(3,-5)$ al punto $(4,7)$; encuentre su representante en posición canónica. Idem si el punto inicial es $(\frac{3}{2},\frac{4}{3})$ y el punto final es $(\frac{1}{2},3)$.
8. Para los puntos del Ejercicio 1, obtenga $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RS}$ y $\overrightarrow{QS}$, y señálelos en el gráfico. ¿Qué puede decir de la orientación relativa de estos vectores?

1.3 Operaciones algebraicas con vectores

La segunda ley de Newton de la mecánica establece que para una partícula de masa m (fija) sometida a varias fuerzas externas, se verifica la ecuación vectorial $\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = m\,\vec{a}$*, o sea: la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre la partícula es igual al producto de la masa (supuesta constante) por la aceleración. Por otro lado dada una fuerza de magnitud, dirección y sentido constantes, el trabajo que realiza sobre un cuerpo que es desplazado una "pequeña" cantidad* $\vec{d}$ *se define como* $\vec{F}_{\text{cte}} \cdot \vec{d}$*, o sea: el producto escalar entre la fuerza (supuesta constante) y el vector desplazamiento (supuesto pequeño); veremos en en Capítulo 6 la definición general de trabajo para una fuerza y un desplazamiento arbitrarios. Otra cantidad de interés físico es el momento angular definido como* $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$*, o sea: el producto vectorial entre la posición* $\vec{r}$ *de la partícula y su cantidad de movimiento* $\vec{p} = m\,\vec{v}$*, donde* $\vec{v}$ *indica su velocidad. Aparecen aquí las distintas* ***operaciones entre vectores****. Recordemos sus definiciones y propiedades.*

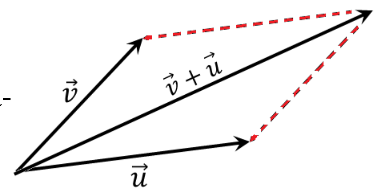
Operaciones de suma y productos

Sea a un número real. Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores de V_3, y sea $\alpha_{uv} = \alpha$ el ángulo entre ellos, que toma un valor entre 0 y π.

Definición 1.3.1 — Suma de vectores.

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

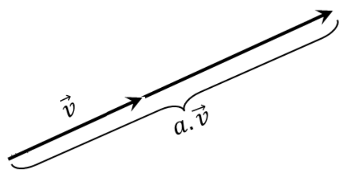
La suma de vectores es un nuevo vector. Se representa gráficamente por medio de la *regla del paralelogramo*.



Definición 1.3.2 — Multiplicación de un vector por un número real.

$$a\,\vec{v} = (av_1, av_2, av_3)$$

Esto da un nuevo vector.



En los siguientes recursos se puede explorar la **regla del paralelogramo** y la **regla del camino** para sumar y restar vectores en forma gráfica.
Suma: `https://www.geogebra.org/m/cWwtgm8C/gi/V4WGqkRb2`
Resta: `https://www.geogebra.org/m/kQFm5YEC/pe/29933`
¿Cómo se describe cada procedimiento de suma/resta de vectores según la regla del paralelogramo?
¿Cómo se describe cada procedimiento de suma/resta de vectores según la regla del camino?

En el siguiente recurso se puede explorar la multiplicación de un vector por un escalar.
Multiplicación por un escalar: `https://www.geogebra.org/m/TJrRu457/pe/29939`
¿Qué sucede si el escalar es un número negativo? ¿Qué sucede si $|a| < 1$?

La suma de vectores y la multiplicación de vector por número real permiten expresar un vector como combinación lineal de los versores básicos:

$$\vec{v} = v_1\,\breve{\imath} + v_2\,\breve{\jmath} + v_3\,\breve{k}$$

Definición 1.3.3 — Producto escalar (o producto punto) entre vectores.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

El resultado del producto escalar es un número real, que puede ser positivo, negativo o cero (¡no es un vector!).

Proposición 1.3.1 Algunas propiedades del producto escalar:
1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ (conmutatividad)
2. $\breve{\imath}\cdot\breve{\imath} = \breve{\jmath}\cdot\breve{\jmath} = \breve{k}\cdot\breve{k} = 1$
3. $\breve{\imath}\cdot\breve{\jmath} = \breve{\jmath}\cdot\breve{k} = \breve{k}\cdot\breve{\imath} = 0$

Un recurso para ejercital el cálculo del producto escalar entre dos vectores.
`https://www.geogebra.org/m/rBJmAvfU/pe/29957`
Es una autoevaluación para comprobar cómo se realiza el cálculo del producto escalar.

Definición 1.3.4 — Producto vectorial (o producto cruz) entre vectores.

$$\vec{u}\times\vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, -u_1v_3 + u_3v_1, u_1v_2 - u_2v_1)$$

El resultado del producto vectorial es un nuevo vector, perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, y en el sentido dado por la *regla de la mano derecha*.

Una forma práctica de calcular el producto vectorial para vectores en el espacio, es mediante el determinante de 3×3:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\,\breve{\imath} - (u_1v_3 - u_3v_1)\,\breve{\jmath} + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\breve{k}$$

Proposición 1.3.2 Algunas propiedades del producto vectorial:
1. $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$ (anticonmutatividad)
2. $\breve{\imath}\times\breve{\imath} = \breve{\jmath}\times\breve{\jmath} = \breve{k}\times\breve{k} = \vec{0}$
3. $\breve{\imath}\times\breve{\jmath} = \breve{k},\ \ \breve{\jmath}\times\breve{k} = \breve{\imath},\ \ \breve{k}\times\breve{\imath} = \breve{\jmath}$

Para vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ de V_2, las operaciones de suma, multiplicación por número real, y producto escalar se definen de manera similar a lo dado para vectores de V_3. El producto vectorial entre vectores de V_2, estrictamente no es un vector de V_2; sin embargo, dado que en próximos capítulos plantearemos situaciones en 3 dimensiones que también son aplicables a 2 dimensiones, consideraremos el producto vectorial entre $(u_1, u_2, 0)$ y $(v_1, v_2, 0)$ en V_3, que da un vector perpendicular al plano xy:

$$(u_1\breve{\imath} + u_2\breve{\jmath} + 0\,\breve{k})\times(v_1\breve{\imath} + v_2\breve{\jmath} + 0\,\breve{k}) = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\breve{\imath} + 0\,\breve{\jmath} + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\breve{k}$$

En el siguiente recurso se pueden comprobar las propiedades anteriores. También se puede practicar el cálculo del producto vectorial entre vectores. Algo muy útil porque muchas veces nos equivocamos.
`https://www.geogebra.org/m/GbKEvPmj/pe/29959`

Módulo de un vector. Normalización de un vector

Sea $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un vector de V_3. El *módulo* (o *norma*) v del vector $\vec{v}$ está dado por

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

El módulo de un vector es un número real, mayor o igual que cero (¡nunca es negativo!). Recordar que para un número real, $|a|$ denota el *valor absoluto* de a; mientras que para un número complejo, $|z|$ denota el *módulo* de z.
El vector nulo tiene módulo cero: $\left|\vec{0}\right| = 0$ (¡tener en cuenta que $\vec{0}$ y 0 son distintos objetos matemáticos!). Recíprocamente, un vector de módulo cero es necesariamente el vector nulo. Simbólicamente:

$$\vec{v} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{v}| = 0.$$

Un vector *unitario* es aquel que tiene módulo uno: $|\vec{v}| = 1$.

■ **Ejemplo 1.9** Dados $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (4, 5, 6)$, hallar la suma y los productos escalar y vectorial entre ambos. Calcular los módulos de los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{v}$.

La suma resulta $\vec{u} + \vec{v} = (1 + 4, 2 + 5, 3 + 6) = 5\,\breve{\imath} + 7\,\breve{\jmath} + 9\,\breve{k}$; el producto escalar da $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1\,4 + 2\,5 + 3\,6 = 32$; y el producto vectorial resulta $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$ $(2\,6 - 3\,5)\,\breve{\imath} - (1\,6 - 3\,4)\,\breve{\jmath} + (1\,5 - 2\,4)\,\breve{k} = -3\,\breve{\imath} + 6\,\breve{\jmath} - 3\,\breve{k}$.
Los módulos son: $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{77}$, $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{5^2 + 7^2 + 9^2} = \sqrt{155}$, y $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

■

Normalización

Todo vector no nulo (y no unitario) puede *normalizarse*, esto es, se puede definir un nuevo vector con la misma dirección y sentido pero de módulo o norma 1. La normalización del vector $\vec{v}$ es el *versor* (o vector unitario) $\breve{v}$ dado por

$$\breve{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \right), \quad \text{si} \quad \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Pruebe que $\breve{v}$ es unitario.

Multiplicación de un vector por un número real

Sea $a \in \mathbb{R}$. El módulo del vector $a\vec{v}$ es $|a\vec{v}| = |a|\,|\vec{v}|$ (que se lee: el módulo de $a\vec{v}$ es igual al valor absoluto de a por el módulo de $\vec{v}$). Dado un vector $\vec{v}$, esta operación permite cambiarle la magnitud, puede o no cambiarle el sentido, pero nunca le altera la dirección. Efectivamente, $a\vec{v}$ es un vector colineal con $\vec{v}$, y tiene el mismo sentido (si $a > 0$) o sentido opuesto (si $a < 0$), o es el vector nulo (si $a = 0$); además la magnitud de $a\vec{v}$ aumenta (si $|a| > 1$), disminuye (si $|a| < 1$), no cambia (si $a = \pm 1$), o se anula (si $a = 0$).

Producto escalar

Se puede escribir como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos\alpha$$

Esta última expresión se puede interpretar como el resultado de multiplicar la magnitud de un vector por la magnitud de la proyección perpendicular del otro vector. Efectivamente en la Figura 1.12(a) se observa que $|\vec{v}|\,\cos\alpha$ es la proyección perpendicular de $\vec{v}$ a lo largo de la dirección de $\vec{u}$; análogamente en la Figura 1.12(b), $|\vec{u}|\,\cos\alpha$ es la proyección perpendicular de $\vec{u}$ a lo largo de la dirección de $\vec{v}$.

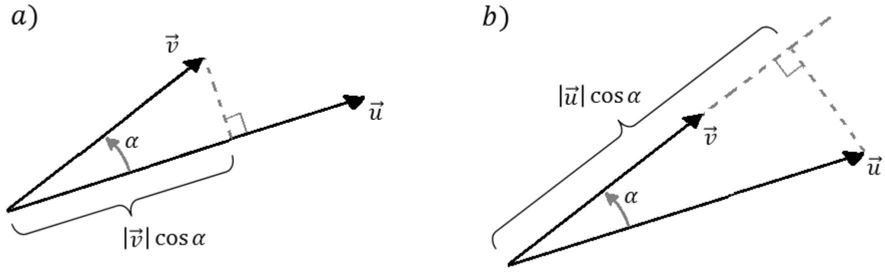


Figura 1.11: Proyección perpendicular de un vector a lo largo de la dirección del otro: (a) $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, y (b) $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

Dos vectores *perpendiculares* tienen producto escalar igual a 0 y se verifica la siguiente propiedad:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{u} = \vec{0} \quad \text{o} \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \text{o} \quad \vec{u} \perp \vec{v}.$$

Consideremos dos vectores de módulos u y v dados, pero se desconoce la orientación relativa entre ellos. El producto escalar entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con esos módulos no puede ser mayor que la cantidad uv (lo que se da cuando los vectores son colineales y de igual sentido: $\alpha = 0$, entonces $\cos\alpha = 1$). Por otro lado, el producto escalar entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con los módulos dados no puede ser menor que la cantidad $-uv$ (esto ocurre cuando los vectores son colineales pero con sentidos opuestos: $\alpha = \pi$, entonces $\cos\alpha = -1$). Esta importante propiedad de que el producto escalar entre dos vectores está acotado:

$$-|\vec{u}|\,|\vec{v}| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}|\,|\vec{v}|$$

la usaremos más adelante cuando, dado un vector, necesitemos hallar otro vector (de módulo conocido) que haga máximo o mínimo el producto escalar entre ellos.

Notar que

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2.$$

Producto vectorial

El módulo del vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,|\operatorname{sen}\alpha|$$

Esta última expresión se puede interpretar como el valor del área de un paralelogramo cuyos lados están determinados por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que forman un ángulo α entre ellos. Ver Figura 1.12(c).

El producto vectorial entre dos vectores colineales da como resultado el vector nulo $\vec{0}$; mientras que el producto vectorial entre dos vectores perpendiculares da como resultado un vector cuyo módulo se obtiene multiplicando los módulos de los vectores individuales: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ entonces $\operatorname{sen}\alpha = 1$.

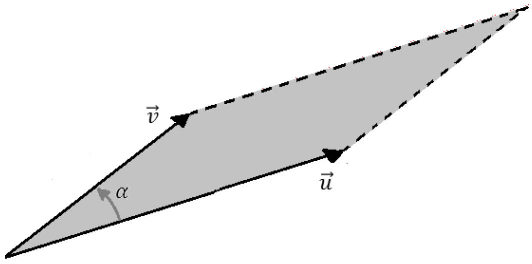


Figura 1.12: Interpretación geométrica de producto vectorial. Paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Observar además que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ si y solo si $\vec{u} = 0$ o $\vec{v} = 0$ o $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son *colineales* (tienen la misma dirección), ya sea con el mismo sentido ($\alpha = 0$) o con sentidos opuestos ($\alpha = \pi$).

En los siguientes recursos pueden explorar cómo utilizar el producto escalar de vectores para determinar la longitud de las proyecciones y cómo utilizar el producto vectorial para calcular áreas de paralelogramos.
`https://www.geogebra.org/m/cjgsECtR/pe/30071`
`https://www.geogebra.org/m/Up4sCRc5/pe/false`

■ **Ejemplo 1.10** Dados $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (4, 5, 6)$ del EJEMPLO 2 determinar el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Para determinar el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ podemos usar que, para vectores no nulos, se verifica que

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

En este ejemplo resulta $\cos\alpha = \frac{32}{\sqrt{14}\sqrt{77}} \simeq 0{,}974632$. El coseno es muy próximo a 1, luego los vectores forman un ángulo muy pequeño entre sí: $\alpha \simeq 0{,}226$ rad $\simeq \frac{72}{1000}\pi$.

■

■ **Ejemplo 1.11** Dado un objeto de masa $m = 2$ kg en la ubicación $P(2, -1, 1)$ y con velocidad $\vec{v} = \frac{1}{2}\breve{\imath} - \breve{k}$ en m/s, hallar: a) la cantidad de movimiento $m\vec{v}$; b) el ángulo que forma este vector con el vector posición $\vec{r}$ y con el vector velocidad; c) el vector momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$; d) verificar que $\vec{L}$ es perpendicular a $\vec{r}$ y a $m\vec{v}$. Graficar.

a) Resulta $m\vec{v} = 2(\frac{1}{2}\breve{\imath} - \breve{k}) = \breve{\imath} - 2\,\breve{k} = (1, 0, -2)$ en kg-m/s.

b) Si calculamos para este ejemplo el producto escalar entre $m\vec{v} = (1, 0, -2)$ y $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = (2, -1, 1)$, vemos que se anula: $1\,2 + 0\,(-1) + (-2)\,1 = 2 + 0 - 2 = 0$; luego estos dos vectores son perpendiculares y el ángulo entre ellos resulta $\frac{\pi}{2}$.

El ángulo entre $m\vec{v} = 2\vec{v} = (1, 0, -2)$ y $\vec{v} = (\frac{1}{2}, 0, -1)$ es 0, pues el primero es un múltiplo positivo del segundo; estos vectores tienen igual dirección y sentido.

c) Tenemos $\vec{L} = \vec{r} \times (m\,\vec{v}) = (2\,\breve{\imath} - \breve{\jmath} + \breve{k}) \times (\breve{\imath} - 2\,\breve{k}) = [(-1)(-2) - 0\,1]\,\breve{\imath} - [2(-2) - 1\,1]\,\breve{\jmath} + [2\,0 - 1(-1)]\,\breve{k} = (2-0)\,\breve{\imath} - (-4-1)\,\breve{\jmath} + (0+1)\,\breve{k} = 2\,\breve{\imath} + 5\,\breve{\jmath} + \breve{k} = (2, 5, 1)$ en kg-m^2/s.
d) Si calculamos los productos escalares, vemos que se anulan: $\vec{L} \cdot \vec{r} = (2, 5, 1) \cdot (2, -1, 1) = 4 - 5 + 1 = 0$ y $\vec{L} \cdot (m\vec{v}) = (2, 5, 1) \cdot (1, 0, -2) = 2 + 0 - 2 = 0$, lo que indica perpendicularidad en ambos casos.

■

Desigualdad triangular

$$|\vec{u} + \vec{u}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

Es decir, el módulo del vector suma $\vec{u} + \vec{v}$ es menor o igual que la suma de los módulos de ambos vectores, siendo igual en el caso en que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales y con igual sentido. Interprete gráficamente usando la regla del paralelogramo.

C Para vectores de V_2 el módulo, la normalización y las propiedades de los productos son similares a lo dado para vectores de V_3.

C En el plano, todo vector unitario $\breve{u} = (u_1, u_2)$ es tal que $u_1^2 + u_2^2 = 1$; luego las componentes pueden expresarse en términos del ángulo θ entre el semieje x positivo y la dirección del vector, en la forma

$$\breve{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta).$$

Un vector cualquiera $\vec{v} = (v_1, v_2)$ del plano (no necesariamente unitario) queda determinado por sus dos componentes, o por su módulo y el ángulo con el semieje $+x$:

$$\vec{v} = (v_x, v_y) \;\text{ donde }\; v_x = |\vec{v}|\,\cos\theta, v_x = |\vec{v}|\,\operatorname{sen}\theta.$$

Si en un problema de tiro oblicuo la rapidez (= módulo de la velocidad) con que se lanza el proyectil es de 10 m/s a un ángulo de 30° con la horizontal, ¿cuánto valen las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial?

■ **Ejemplo 1.12** a) Hallar todos los vectores $\vec{v} \in V_2$ que sean perpendiculares a $\vec{u} = (4, -3)$.
b) Hallar el o los vectores unitarios $\breve{w} \in V_2$ que sean perpendiculares a $\vec{u} = (4, -3)$.

a) Planteamos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, para $\vec{v} = (v_1, v_2)$ a determinar. Luego tenemos una ecuación a resolver: $4v_1 - 3v_2 = 0$, de donde podemos despejar por ejemplo $v_2 = \frac{4}{3}v_1$. Todos los vectores de la forma $\vec{v} = (v_1, \frac{4}{3}v_1)$ con $v_1 \in \mathbb{R}$, esto es múltiplos del vector $(1, \frac{4}{3})$ y también del vector $(3, 4)$, son perpendiculares a $\vec{u} = (4, -3)$.

b) Ahora planteamos que $\vec{u} \cdot \breve{w} = 0$, para $\breve{w} = (w_1, w_2)$ a determinar, pero siendo $\breve{w}$

unitario, es decir que $\sqrt{w_1^2 + w_2^2} = 1$. Luego, tenemos ahora dos ecuaciones a resolver:

$$\begin{cases} 4w_1 - 3w_2 = 0 \\ w_1^2 + w_2^2 = 1 \end{cases}$$

cuya solución es $w_1 = \pm\frac{3}{5}$, $w_2 = \frac{4}{3}w_1 = \pm\frac{4}{5}$. De la familia (infinita) de vectores perpendiculares a $\vec{u}$ hallada en el inciso a), solamente los dos vectores $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ y $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ son unitarios.

■

■ **Ejemplo 1.13** Dado $\vec{u} = (1, 2)$, hallar vectores de módulo $\sqrt{10}$ que sean: a) colineal y con el mismo sentido, b) colineal y con sentido opuesto, ó c) perpendicular a $\vec{u}$. Graficar.

a) Debe ser de la forma $a\vec{u}$ con $a > 0$: tenemos que $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, luego $\vec{v} = a\vec{u}$ tiene módulo $|\vec{v}| = |a|\,|\vec{u}| = a\sqrt{5}$ que debe ser igual a $\sqrt{10}$, de donde $a = \sqrt{2}$. Luego $\vec{v} = \sqrt{2}\,(1, 2) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

b) El vector opuesto al hallado en a), resuelve este caso: $-\vec{v} = -(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.

c) Planteamos $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, donde $\vec{w} = (w_1, w_2)$ tiene módulo $\sqrt{10}$. Luego $1w_1 + 2w_2 = 0$ y $\sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \sqrt{10}$. Este sistema (no lineal) de 2 ecuaciones tiene 2 soluciones posibles: los vectores $\vec{w}_+ = \sqrt{2}(-2, 1)$ y $\vec{w}_- = \sqrt{2}(2, -1)$ (verifique que cada uno es solución del sistema de ecuaciones planteado).
Ver Figura 1.13.

■

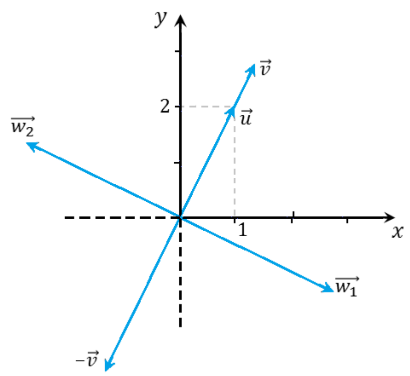


Figura 1.13: Ejemplo 5.

Ejercicios

1. Pruebe las siguientes propiedades:
   a) $|\vec{v}| = 0$ si y sólo si $\vec{v} = \vec{0}$
   b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si y sólo si $\vec{u} = \vec{0}$ ó $\vec{v} = \vec{0}$ ó $\alpha = \frac{\pi}{2}$
   c) $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$
   d) $-|\vec{u}|\,|\vec{v}| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}|\,|\vec{v}|$
2. Sea $\vec{v} = (1, 2, 3)$. Calcule el vector opuesto, $\frac{1}{2}$ por el vector y tres veces el vector. Exprese

cualquier múltiplo (distinto de cero) de $\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores base. Normalice $\vec{v}$.

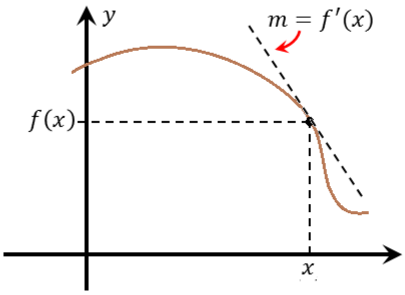
3. *a*) Dados $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (4, 5, 6)$, calcule $3\vec{u} - \vec{v}$, $(2\vec{u}) \cdot \vec{v}$, y $(-\frac{1}{2}\vec{v}) \times \vec{u}$.
   b) Dados $\vec{u} = (4, -3)$ y $\vec{v} = (-2, 1)$, calcule $3\vec{u} - \vec{v}$, $(2\vec{u}) \cdot \vec{v}$, y $(-\frac{1}{2}\vec{v}) \times \vec{u}$; grafique los vectores hallados.
4. Determine el vector $\vec{v} \in V_2$ cuya magnitud es 4, y tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{u} = -\breve{\imath} + \breve{\jmath}$
5. *a*) Repase las propiedades de las operaciones de suma de vectores y multiplicación de vector por número real.
   b) Pruebe las propiedades enunciadas en esta sección para los productos escalar y vectorial.
6. Considere un bloque sobre una mesa, sin fricción. Si se tira del bloque con una soga haciendo una fuerza $\vec{F}$ cuya intensidad es de 10 N (1 Newton=1 kg-m/s^2) formando un ángulo de 30° con la horizontal, encuentre las componentes horizontal y vertical de la fuerza. Si también se empuja al bloque del otro lado (para moverlo en el mismo sentido) con una fuerza de igual intensidad pero completamente horizontal, ¿cuánto vale la suma de estas dos fuerzas?
7. Sobre una partícula de $\frac{1}{2}$ kg actúan tres fuerzas constantes: $\vec{F}_1$ hacia abajo de intensidad 1, $\vec{F}_2 = (1, 2)$, y $\vec{F}_3 = -\breve{\imath} + 4\,\breve{\jmath}$, todas medidas en N.
   a) ¿Cuál es la fuerza total, neta o *resultante*? ¿Cuánto vale la aceleración de la partícula?
   b) Si la partícula es desplazada desde el origen hasta un punto a 2 mm a la derecha y 1 mm hacia abajo, calcule el trabajo debido a cada una de las fuerzas individuales, y el trabajo total o neto.

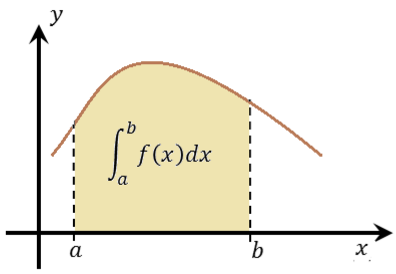
   (Considere el problema en 2D. No olvide las unidades al expresar sus resultados.)

1.4 Trabajar en varias dimensiones

La mayoría de las aplicaciones que veremos se refieren a espacios de 3 y 2 dimensiones, e intentaremos en la medida de lo posible interpretar gráficamente el problema. En algunas situaciones físicas, puede ocurrir que una propiedad de un cuerpo dependa de muchas (2, 3 ó más) variables que la definen. Por ejemplo, en problemas de relatividad resulta imprescindible trabajar con la "posición espacio-temporal" de un objeto, esto es $P(x, y, z, t)$ en $\mathbb{R}^4$. Un ejemplo en el campo de la química es la entalpía de un sistema, que se expresa en términos de la entropía, la presión y el número de partículas de distinto tipo, $H(S, p, \{N_i\})$.
Veremos algunos casos en más de 3 dimensiones, aunque ya no seamos capaces de representarlo gráficamente... Muchas definiciones que se dan aquí se extienden de manera natural a n dimensiones (donde n es algún número natural), por ejemplo se puede hablar de puntos $P \in \mathbb{R}^n$ y de vectores $\vec{v} \in V_n$.

En Análisis Matemático I se trabajó con UNA de UNA variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x)$ indica que al número real x se le asigna un número real $f(x)$. Podemos decir que se trabajó en una dimensión. En Análisis Matemático II trabajamos con UNA o con VARIAS funciones que dependen de UNA o de VARIAS variables, esto es, en varias dimensiones. Los distintos tipos de funciones que estudiaremos por separado en los próximos capítulos son:

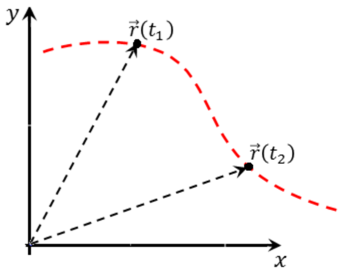


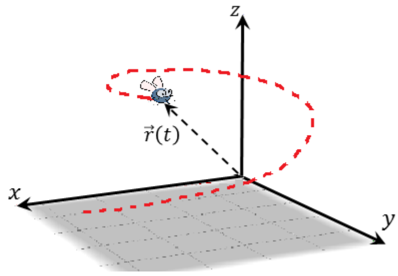


FUNCIÓN VECTORIAL DE UN PARÁMETRO *(Capítulo 2)* $\vec{r} : \mathbb{R} \to V_n$

A un único número real (llamado parámetro) se le asigna un vector de 2, 3 ó en general n componentes.

■ **Ejemplo 1.14** La posición $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ de un proyectil en tiro oblicuo, en función del tiempo t; la velocidad $\vec{v}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de una mosca volando por una habitación, en función del tiempo t.



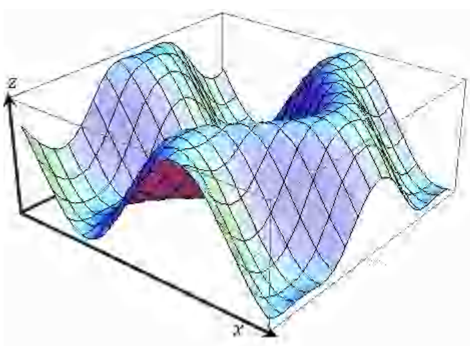


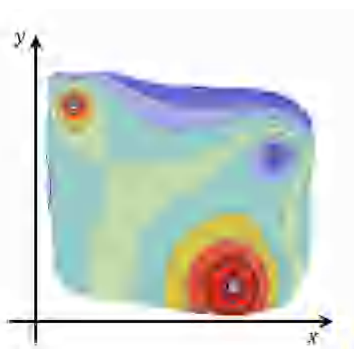
■

FUNCIÓN ESCALAR DE VARIAS VARIABLES *(Capítulos 3, 4 y 5)* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

A un par, terna o en general n-upla de números reales (llamadas variables independientes) se le asigna un único número real.

■ **Ejemplo 1.15** La temperatura $T(x, y)$ en el punto de coordenadas (x, y) de una placa; la densidad volumétrica de masa $\rho(x, y, z)$ en el punto (x, y, z) de un cuerpo sólido.



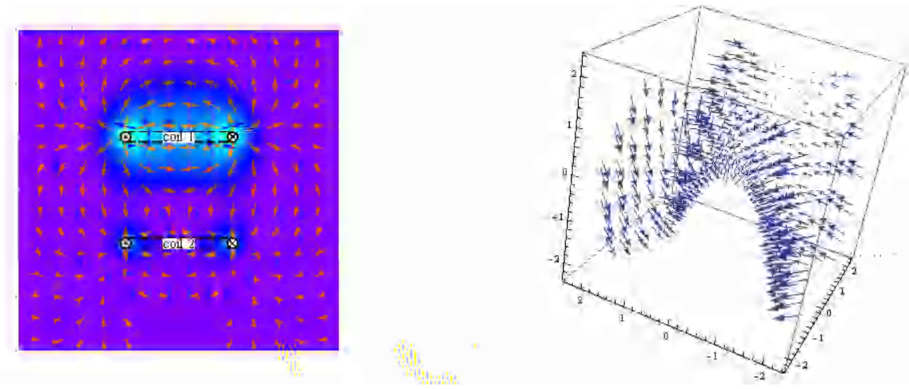


■

CAMPO VECTORIAL *(Capítulo 6)* $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to V_n$

A una n-upla ($n > 1$) de números reales se le asigna un vector de n componentes.

■ **Ejemplo 1.16** La velocidad $\vec{v}(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$ en el punto (x, y) de un capa de fluido laminar; el campo eléctrico $\vec{E}(x, y, z) = (E_1(x, y, z), E_2(x, y, z), E_3(x, y, z))$ en un punto (x, y, z) debido a una carga eléctrica puntual.



■

Para estos diferentes tipos de funciones estudiaremos básicamente los mismos conceptos que ya se vieron en Análisis Matemático I: dominio y rango, representación gráfica (cuando sea posible), concepto de límite y continuidad, derivación, puntos críticos y extremos, problemas de optimización, integración, etc. Aunque, como es de imaginar, en Análisis II hay más variantes que enriquecen el estudio y que permiten describir situaciones como, por ejemplo, el movimiento de objetos en nuestro mundo tridimensional o el cambio de entalpía en un dado proceso químico entre diferentes sustancias.

1.5 Ecuaciones de una recta en el plano y en el espacio

Recta en el plano

Recordemos distintas formas de describir una recta en el plano xy. Dependiendo de los datos disponibles, podemos usar una de las siguientes formas alternativas:

- la pendiente m y la ordenada al origen b: $y = mx + b$
- dos puntos $P_0(x_0, y_0)$ y $P_1(x_1, y_1)$ si $x_1 \neq x_0$ e $y_1 \neq y_0$: $\dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ (*ecuación simétrica*)
- la pendiente m y un punto $P_0(x_0, y_0)$: $y - y_0 = m\,(x - x_0)$

Ahora, supongamos que el dato con que contamos es la dirección de la recta, que viene dada por cierto vector no nulo del plano, $\vec{v} = (v_1, v_2)$. ¿Es suficiente este dato para determinar unívocamente la recta? La respuesta es no, necesitamos además conocer al menos un punto $P_0(x_0, y_0)$ perteneciente a la recta L.

Conociendo $\vec{v}$ y P_0 podemos considerar lo siguiente: para cualquier punto $P(x, y) \in L$, se tiene que el vector $\overrightarrow{P_0P}$, que se puede obtener como $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$ es colineal con $\vec{v}$, luego $\overrightarrow{P_0P}$ debe ser algún múltiplo real t del vector $\vec{v}$ (ver Figura 1.14):

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = t\,\vec{v}\,, \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}$$

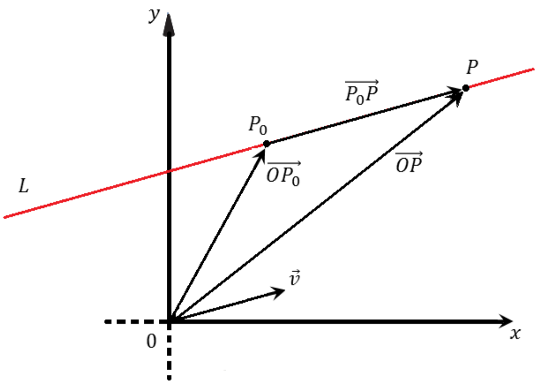


Figura 1.14: Recta en el plano xy. El vector $\overrightarrow{P_0P}$ es proporcional al vector director $\vec{v}$.

Escribiendo $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ y $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}_0$, resulta una *ecuación vectorial de la recta*:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Notar que ésta es una ecuación vectorial en el plano, que corresponde a 2 ecuaciones escalares. Usando que $\vec{r} = (x, y)$ y $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$, podemos escribir esta ecuación en componentes, obteniendo *ecuaciones paramétricas de la recta*:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,v_1 \\ y = y_0 + t\,v_2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

C Si eliminamos el parámetro t entre las dos ecuaciones anteriores, recuperamos las formas que ya conocíamos para la ecuación de la recta. Efectivamente, si v_1 y v_2 son ambos distintos de 0, se tiene que t es igual a $\dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2}$, de donde también $y - y_0 = \dfrac{v_2}{v_1}(x - x_0)$. Se llega a las formas dadas al principio si notamos que $\dfrac{v_2}{v_1} = \operatorname{tg}\alpha = m$, siendo α la inclinación de $\vec{v}$ respecto del semieje $+x$.

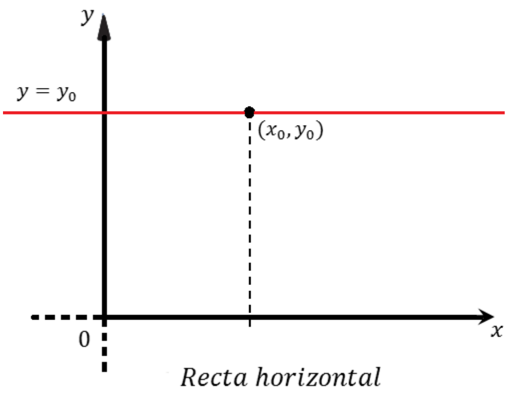
Para completar, veamos la forma de las ecuaciones si una de las componentes de $\vec{v}$ es cero (pero no ambas):

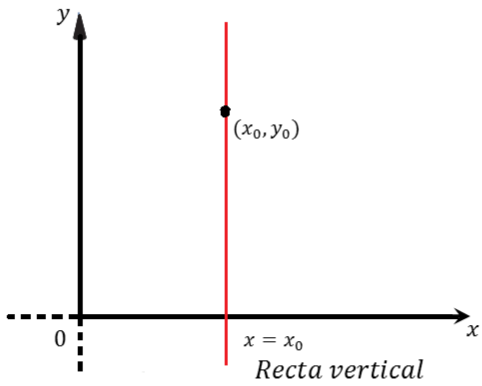
- recta vertical: cuando $v_1 = 0$, resulta $x = x_0$;

- recta horizontal: cuando $v_2 = 0$, resulta $y = y_0$.

En el siguiente recurso es posible explorar cómo se construye gráficamente las ecuaciones de las rectas en el plano.
`https://www.geogebra.org/m/C8jYqD5x/pe/30075`
¿Cuál es la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $(-1, 3)$ y es paralela al vector $(4, 1)$?

Otro recurso intresantes es
https://www.geogebra.org/m/UVduQSCD/pe/30101
¿Cuál es la ordenada al origen de la recta que pasa por el punto $(7, 2)$ y es paralela al vector $(-4, 2)$?





Recta en el espacio

Una recta L queda determinada por su dirección [dada por algún vector no nulo $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ paralelo a la recta], y por algún punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ perteneciente a la recta. Con estos datos procedemos como antes: para cualquier punto $P(x, y, z) \in L$, se tiene que el vector $\overrightarrow{P_0P}$, que se puede obtener como $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$, es colineal con $\vec{v}$, luego $\overrightarrow{P_0P}$ debe ser algún múltiplo real t del vector $\vec{v}$ (ver Figura 1.15):

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = t\,\vec{v}\,, \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}$$

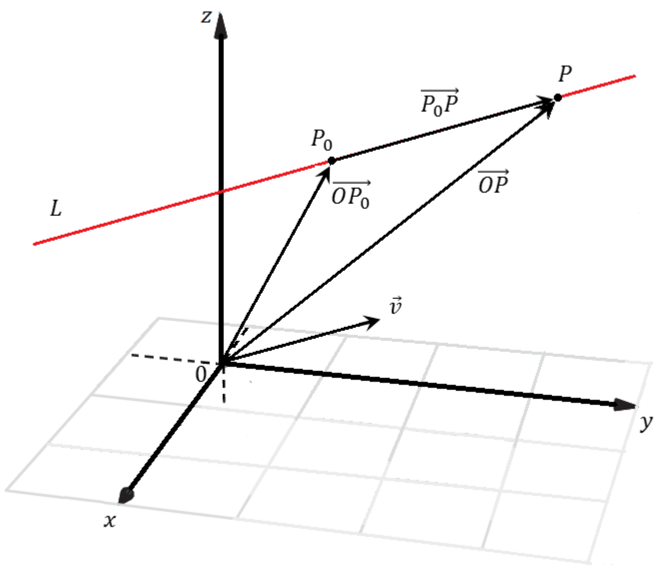


Figura 1.15: Recta en el espacio. El vector $\overrightarrow{P_0P}$ es proporcional al vector director $\vec{v}$.

Escribiendo $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ y $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}_0$, resulta una *ecuación vectorial de la recta*:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Notar que ésta es una ecuación vectorial en el espacio, que corresponde a 3 ecuaciones escalares. Usando que $\vec{r} = (x, y, z)$ y $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, podemos escribir esta ecuación en componentes, obteniendo *ecuaciones paramétricas de la recta*:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\, v_1 \\ y = y_0 + t\, v_2 \\ z = z_0 + t\, v_3 \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

Observar que, por construcción, $t = 0$ corresponde al punto P_0; $t > 0$ da los puntos de la semirrecta en el mismo sentido de $\vec{v}$, originada en P_0; mientras que $t < 0$ da los puntos de la semirrecta en el sentido de $-\vec{v}$, a partir de P_0.

Eliminando el *parámetro t* entre las 3 ecuaciones anteriores, si v_1, v_2 y v_3 son todos distintos de 0 [2], se tienen *ecuaciones simétricas de la recta*:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

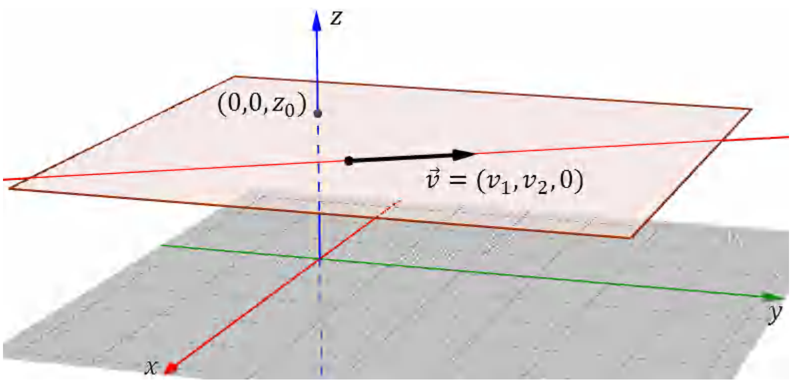
El vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es un *vector director* de la recta; observe que ese vector normalizado, o el vector opuesto, ó $\frac{1}{2}$ por el vector, tres veces el vector, o cualquier otro múltiplo (distinto de cero) de éste también servirán como vector director de la misma recta.

Para completar, veamos la forma de las ecuaciones si una o dos de las componentes de $\vec{v}$ son cero.

- *Recta paralela a un plano coordenado*: cuando por ejemplo v_1 y v_2 no son 0 y $v_3 = 0$, resulta

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2} \\ z = z_0 \end{cases}$$

Veremos que cada una de estas dos ecuaciones corresponde, por separado, a un plano vertical y a uno horizontal respectivamente; la intersección entre ambos planos es justamente la recta L.

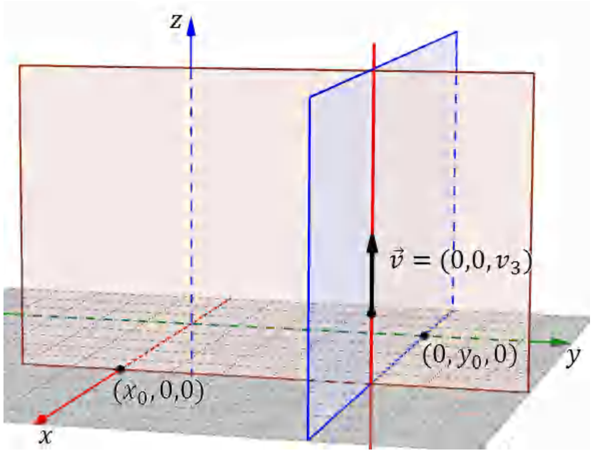


- *Recta paralela a un eje coordenado*: cuando por ejemplo $v_1 = v_2 = 0$ y $v_3 \neq 0$, resulta

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

Veremos que cada una de estas dos ecuaciones corresponde, por separado, a un plano vertical (uno paralelo al plano coordenado yz y el otro paralelo a xz); la intersección entre ambos planos es justamente la recta L.

[2] Esto se puede decir, de manera compacta, como $v_1 v_2 v_3 \neq 0$.



Supongamos ahora que los datos disponibles son dos puntos P_0 y P_1 por los que pasa la recta. Entonces podemos tomar como vector director al $\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$, y resulta

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

que es lo mismo que

$$\vec{r} = (1-t)\vec{r}_0 + t\,\vec{r}_1, \quad t \in \mathbb{R}$$

Observar que, por construcción, $t = 0$ corresponde al punto P_0 y $t = 1$ a P_1.
Volveremos a estas expresiones en el Capítulo 2, y discutiremos en particular cómo describir no toda la recta sino solamente un segmento de ella (un adelanto: ¿podría ser para valores de t entre 0 y 1?).

■ **Ejemplo 1.17** Dar ecuaciones paramétricas para la recta L que pasa por el punto $P_0(2,5,3)$ y tiene como vector director a $\vec{v} = (0,-1,0)$. Determinar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta: $O(0,0,0)$, $A(2,2,2)$, $B(3,3,3)$, $C(2,0,3)$.

Un punto P cualquiera de la recta tiene coordenadas (x, y, z) tales que

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = (2\,\breve{\imath} + 5\,\breve{\jmath} + 3\,\breve{k}) + t\,(0\,\breve{\imath} - 1\,\breve{\jmath} + 0\,\breve{k}) = 2\,\breve{\imath} + (5-t)\,\breve{\jmath} + 3\,\breve{k}$$

Entonces

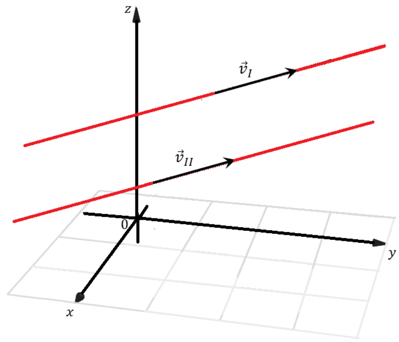
$$\begin{cases} x = 2 + t\,0 \\ y = 5 + t\,(-1) \\ z = 3 + t\,0 \end{cases} \qquad luego \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 - t\,, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3 \end{cases}$$

Notar que, en este ejemplo, los puntos de L tienen sus componentes x, z fijas, mientras que la componente y toma todos los valores reales: la recta L es paralela al eje y.
El punto C pertenece a la recta, pues verifica las ecuaciones $x = 2$, $y = 0$ (con $t = 5$), $z = 3$; pero la recta no pasa por O ni por A ni B (justifique y grafique).

■

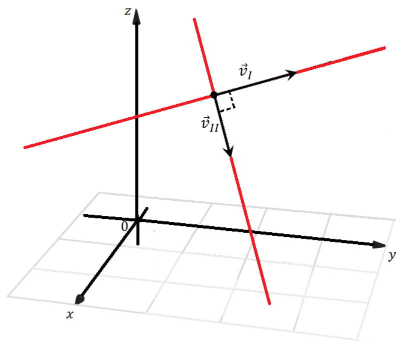
Orientaciones relativas de dos rectas en el espacio

Rectas paralelas: $L_I \parallel L_{II}$ cuando $\vec{v}_I \parallel \vec{v}_{II}$. Una forma de detectar paralelismo de rectas es calcular el producto vectorial entre sus vectores directores (¿cómo?).

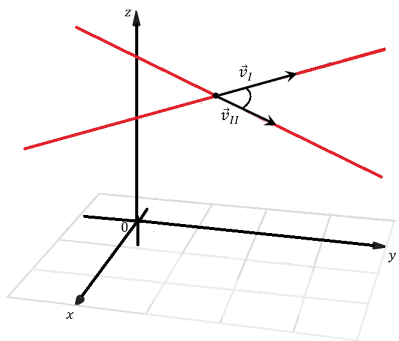


Rectas coincidentes: L_I coincide con L_{II} cuando son paralelas y además existe un punto común a ambas (de hecho, ¡todos sus puntos son comunes!).

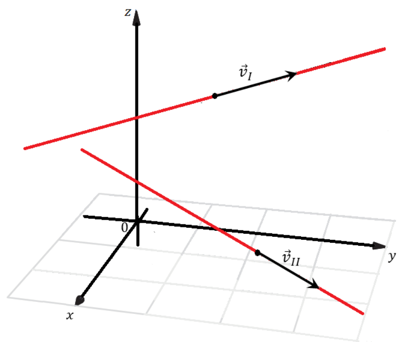
Rectas perpendiculares (u ortogonales): $L_I \perp L_{II}$ cuando $\vec{v}_I \perp \vec{v}_{II}$ y las rectas se cortan en un punto. Una forma de detectar perpendicularidad de rectas es calcular el producto escalar entre los vectores directores (justifique).



Rectas oblicuas: dos rectas que se cortan en un punto, forman un ángulo agudo entre ellas que está dado por $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{v}_I \cdot \vec{v}_{II}|}{|\vec{v}_I|\,|\vec{v}_{II}|}$



Rectas alabeadas: se denomina así a dos rectas que no son paralelas ni se intersectan en el espacio (fabríquelas utilizando un par de lapiceras).



Ejercicios

1. Dé ecuaciones apropiadas que representen cada uno de los 3 ejes coordenados.
2. Tome un objeto con forma de cubo y marque una de las 12 aristas. Señale todas las aristas que, respecto de la marcada, sean: a) paralelas, b) perpendiculares, y c) alabeadas.
3. Para el sistema de coordenadas del aula que fijó en el Ejercicio 1 de la Sección **??**, escriba ecuaciones que representen la recta que contiene al lado inferior del pizarrón.
4. Pruebe justificadamente que las ecuaciones paramétricas $x = 1 + 2t, y = -2 + 4t, z = 4 - 4t$ con $t \in \mathbb{R}$, y las ecuaciones simétricas $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-4}$ describen la misma recta.
5. Escriba ecuaciones para la recta que pasa por el punto $(-2, 3, 1)$ y es paralela al vector $(4, 0, -1)$. Determine cuáles de los siguientes puntos pertenecen a dicha recta: $A(2, 3, 0)$, $B(-6, 3, 2)$, $C(2, 1, 0)$, $D(6, 3, -2)$.
6. ¿Qué recta es paralela al vector que une los puntos $P_0(1, 0, 1)$ y $P_1(1, 3, -2)$, y pasa por el origen? ¿Pertenecen P_0 ó P_1 a esa recta? Explique.
7. Dadas las rectas determinadas por las ecuaciones $x = 3 + 2t, y = -2 + 5t, z = 1 - t$ con $t \in \mathbb{R}$, y $x = 7 - 2s, y = 8 + s, z = -1 + 2s$ con $s \in \mathbb{R}$, halle (si existe) el punto de intersección entre ambas rectas. ¿Para qué valor de t y de s se obtiene dicho punto?

1.6 Ecuaciones de un plano en el espacio

Un plano Π queda determinado por su inclinación u orientación espacial [dada por algún vector no nulo $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ perpendicular o "normal" al plano], y por algún punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ perteneciente al plano. Con estos datos podemos considerar lo siguiente: para cualquier punto $P(x, y, z) \in \Pi$, se tiene que el vector $\overrightarrow{P_0P}$, que se puede obtener como $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}$, está contenido en el plano y por lo tanto debe ser perpendicular al vector $\vec{n}$. Entonces (ver Figura 1.16):

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0$$

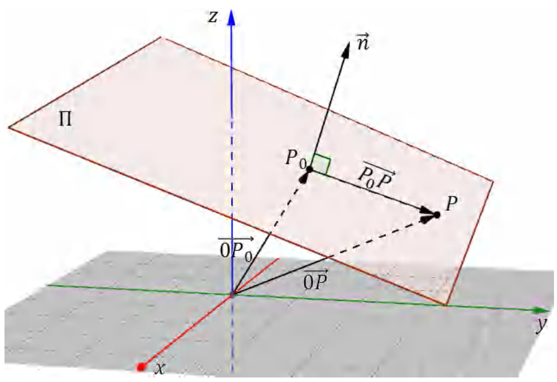


Figura 1.16: Plano en el espacio. El vector $\overrightarrow{P_0P}$ es perpendicular al vector normal $\vec{n}$.

Escribiendo $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ y $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}_0$, resulta una *ecuación "vectorial" del plano*:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

Notar que ésta es una única ecuación escalar, pero expresada en términos de vectores, de ahí su nombre. Usando que $\vec{r} = (x, y, z)$ y $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y desarrollando el producto escalar, obtenemos una *ecuación "escalar" del plano*:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$$

El vector $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ es un *vector normal* al plano; observe que ese vector normalizado, o el vector opuesto, ó $\frac{1}{2}$ por el vector, tres veces el vector, o cualquier otro múltiplo (distinto de cero) de éste también servirán como vector normal al mismo plano.

A partir de la expresión anterior, se obtiene una *ecuación "lineal" del plano*:

$$n_0 + n_1x + n_2y + n_3z = 0$$

donde $n_0 = -n_1x_0 - n_2y_0 - n_3z_0$ (compruébelo). Notar que la ecuación escalar dada es lineal en las variables x, y, z, de ahí su nombre.

C Si un plano contiene al origen, su ecuación debe ser de la forma $n_1x + n_2y + n_3z = 0$, o sea con el término constante n_0 igual a 0 (justifique).

Otra forma de escribir una ecuación de un plano surge de despejar una de las variables en términos de las otras dos. Por ejemplo, un plano no vertical (esto es, para $n_3 \neq 0$) admite una ecuación de la forma

$$\Pi : \qquad z = m_1\,x + m_2\,y + b$$

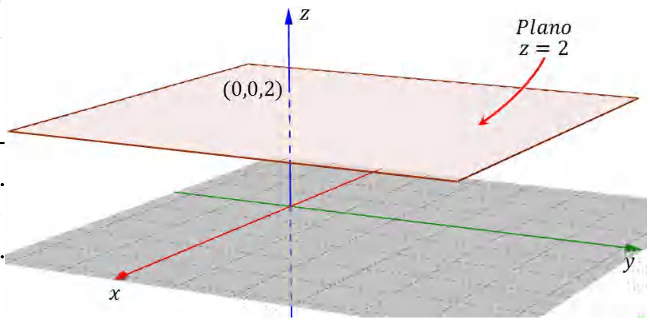
Muestre que un vector normal al plano es $\vec{m} = (-m_1, -m_2, +1)$. Observe que $\vec{m}$ "apunta hacia arriba".

Un procedimiento útil para graficar un plano es:

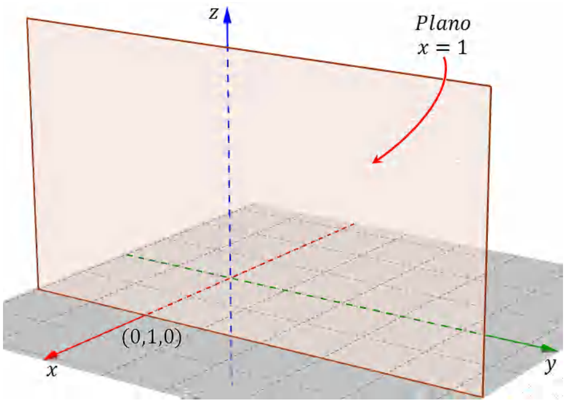
- ver dónde corta a los ejes coordenados (es decir, para obtener la intersección del plano con el eje x hacemos hacemos $y = 0, z = 0$ en la ecuación del plano; para obtener la intersección con el eje y, hacemos $x = 0, z = 0$ en la ecuación del plano y para obtener la intersección con el eje z, hacemos $x = 0, y = 0$ en la ecuación del plano);
- dónde corta a los planos coordenados (es decir, para obtener la intersección con el plano xy hacemos $z = 0$; para obtener la intersección con el plano xz hacemos $y = 0$ y para obtener la intersección con el plano yz hacemos $x = 0$).

■ **Ejemplo 1.18** Graficar los siguientes planos: $z = 2$, $x = 1$, $y = -1$.

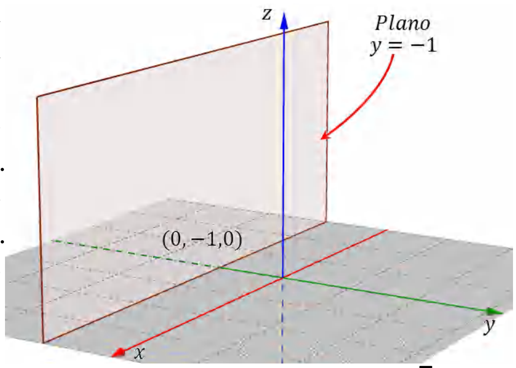
Para graficar el plano $z = 2$ vemos que no posee intersección con los ejes coordenados x e y y que interseca al eje coordenado z en $z = 2$.
La intersección con el plano xy se obtiene fijando $z = 0$ lo que da como resultado que no hay intersección, es decir el plano $z = 2$ no corta al plano xy.
La intersección con el plano yz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $z = 2, x = 0$.
La intersección con el plano xz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $z = 2, y = 0$.



Para graficar el plano $x = 1$ vemos que no posee intersección con los ejes coordenados y e z y que interseca al eje coordenado x en $x = 1$.
La intersección con el plano xy da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $z = 0, x = 1$. La intersección con el plano yz da como resultado que no hay intersección, es decir el plano $x = 1$ no corta al plano yz. La intersección con el plano xz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $x = 1, y = 0$.



Para graficar el plano $y = -1$ vemos que no posee intersección con los ejes coordenados x e z y que interseca al eje coordenado y en $y = -1$.
La intersección con el plano xy da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $z = 0, y = -1$.
La intersección con el plano yz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $x = 0, y = -1$.
La intersección con el plano xz da como resultado que no hay intersección, es decir el plano $y = -1$ no corta al plano xz.

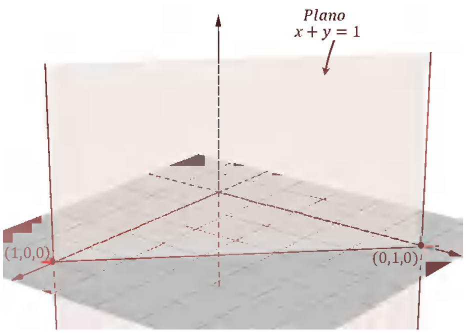


■

Las ecuaciones cartesianas de los planos del ejemplo anterior poseen dos variables ausentes y son planos paralelos a alguno de los planos coordenados.

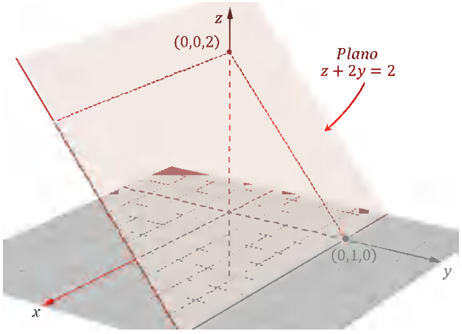
■ **Ejemplo 1.19** Graficar los siguientes planos: $x + y = 1$, $z + 2y = 2$, $x + 2z = 1$.

La intersección del plano $x + y = 1$ con el eje x se obtiene haciendo $y = 0, z = 0$ en la ecuación del plano, luego $x = 1$; entonces el punto $P(1, 0, 0)$ es un punto del eje x y del plano dado. Para obtener la intersección con el eje y, hacemos $x = 0, z = 0$ en la ecuación del plano, luego $y = 1$; entonces $Q(0, 1, 0)$ es un punto del eje y y del plano. Para obtener la intersección con el eje z, hacemos $x = 0, y = 0$ y vemos que no hay intersección, es decir, el plano $x + y = 1$ no corta al eje coordenado z.

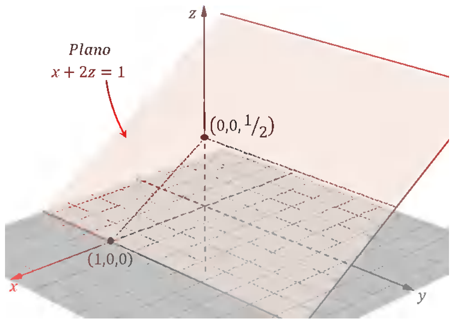


La intersección con el plano xy da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $x + y = 1, z = 0$. La intersección con el plano yz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $y = 1, x = 0$. La intersección con el plano xz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $x = 1, y = 0$.

Al buscar la intersección del plano $z + 2y = 2$ con los ejes coordenados obtenemos que el plano no posee intersección con el eje coordenado x y que el punto $P(0, 1, 0)$ es un punto del eje y y del plano dado y el punto $Q(0, 0, 2)$ es un punto del eje z y del plano.
La intersección con el plano xy da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $y = 1, z = 0$. La intersección con el plano yz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $z + 2y = 2, x = 0$. La intersección con el plano xz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $z = 2, y = 0$.



Al buscar la intersección del plano $x + 2z = 1$ con los ejes coordenados obtenemos que el plano no posee intersección con el eje coordenado y y que el punto $P(1, 0, 0)$ es un punto del eje x y del plano dado y el punto $Q(0, 0, \frac{1}{2})$ es un punto del eje z y del plano.
La intersección con el plano xy da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $x = 1, z = 0$. La intersección con el plano yz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $z = \frac{1}{2}, x = 0$. La intersección con el plano xz da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $x + 2z = 1, y = 0$.



■

Las ecuaciones cartesianas de los planos del ejemplo anterior poseen una variable ausente y son planos "generados"por la recta determinada por las variables presentes.

■ **Ejemplo 1.20** Graficar el plano de ecuación $2x + 3y + 4z = 12$. Hallar un vector normal a dicho plano. Determinar cuáles de los siguientes puntos pertenecen al plano: $A(10, -\frac{10}{3}, \frac{1}{2})$, $B(10, -\frac{10}{3}, 2)$, $C(5, 5, 5)$, $D(1, 1, \frac{7}{4})$.

Para obtener la intersección del plano con el eje x, hacemos $y = 0, z = 0$ en la ecuación del plano, luego $2x + 0 + 0 = 12$; entonces el punto $P(6, 0, 0)$ es un punto del eje x y del plano dado. Para obtener la intersección con el eje y, hacemos $x = 0, z = 0$ en la ecuación del plano, luego $0 + 3y + 0 = 12$; entonces $Q(0, 4, 0)$ es un punto del eje y y del plano. Para obtener la intersección con el eje z, hacemos $x = 0, y = 0$ en la ecuación del plano, luego $0 + 0 + 4z = 12$; entonces $R(0, 0, 3)$ es un punto del eje z y del plano dado.

La intersección con el plano xy se obtiene fijando $z = 0$, lo que da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $2x + 3y = 12, z = 0$. La intersección con el plano yz se obtiene fijando $x = 0$, lo que da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas

$3y + 4z = 12, x = 0$. La intersección con el plano xz se obtiene fijando $y = 0$, lo que da como resultado la recta con ecuaciones cartesianas $2x + 4z = 12, y = 0$.

En la Figura **??** se muestra sólo la parte del plano en el primer octante: el triángulo cuyos vértices son los puntos P, Q, R dados en el primer párrafo, y cuyos lados $\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RS}$ pertenecen a las rectas definidas en el segundo párrafo.
Comparando la ecuación del plano dado con la forma general, vemos que un vector normal al plano es $\vec{n} = (2, 3, 4)$, o cualquier múltiplo de este.
El punto A satisface la ecuación del plano, pues se verifica que $2\,10 + 3\,(-\frac{10}{3}) + 4\,\frac{1}{2} = 12$; el punto D también, no así B ni C (justifique y grafique).

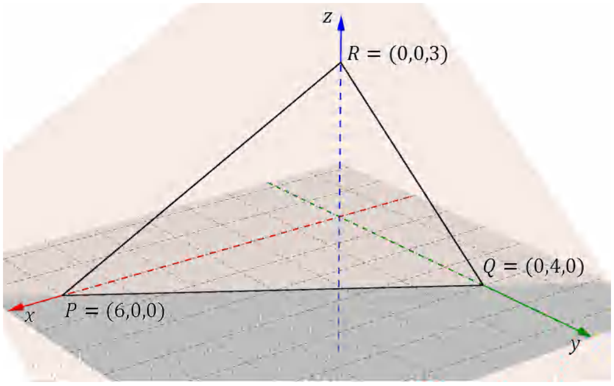
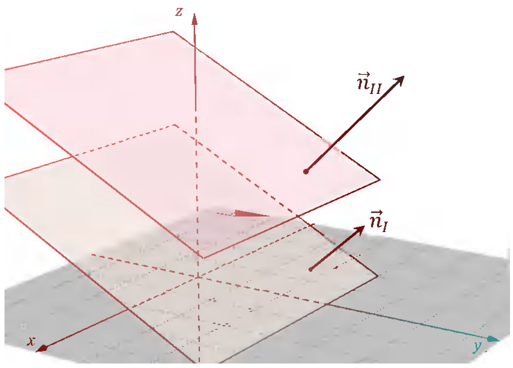


Figura 1.17: Ejemplo de plano en el espacio: se muestra la porción que se ve en el primer octante.

■

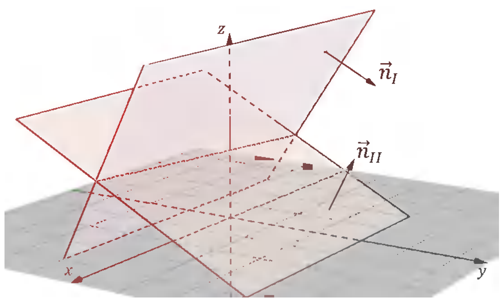
Orientaciones relativas de dos planos en el espacio

Planos paralelos: $\Pi_I \parallel \Pi_{II}$ cuando $\vec{n}_I \parallel \vec{n}_{II}$.

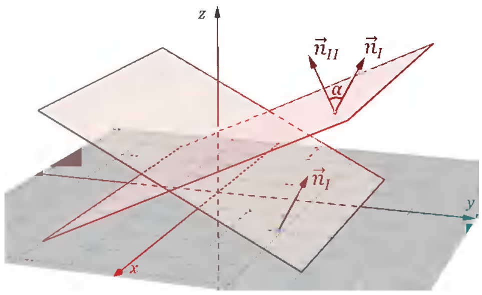


Planos coincidentes: Π_I coincide con Π_{II} cuando son paralelos y además existe un punto común a ambos (de hecho, ¡todos sus puntos son comunes!).

Planos perpendiculares (u ortogonales): $\Pi_I \perp \Pi_{II}$ cuando $\vec{n}_I \perp \vec{n}_{II}$.



Planos oblicuos: dos planos no paralelos se intersectan en una recta, y forman un ángulo agudo entre ellos tal que $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_I \cdot \vec{n}_{II}|}{|\vec{n}_I|\,|\vec{n}_{II}|}$



Ejercicios

1. Dé ecuaciones apropiadas que representen cada uno de los 3 planos coordenados.
2. Tome un objeto con forma de cubo y marque una de las 6 caras. Señale todas las caras que, respecto de la marcada, sean: a) paralelas, y b) perpendiculares.
3. Para el sistema de coordenadas del aula que fijó en el Ejercicio 1 de la Sección **??**, escriba una ecuación que represente el plano del techo del aula.
4. Indique una manera de determinar analíticamente si: a) dos planos son paralelos, b) dos planos son perpendiculares, c) una recta es perpendicular a un plano.
5. Halle una ecuación para el plano que pasa por el punto $P_0(3, 2, 2)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (2, 3, -1)$. ¿Contiene este plano al origen? Explique.
6. Halle una ecuación para el plano que es paralelo al plano $2x - y + z = 4$ y pasa por el punto $P_0(1, 2, 3)$.

1.7 Otras superficies en el espacio

*En general, una ecuación del tipo $F(x, y, z) = 0$ se representa geométricamente en el espacio como una superficie. Mencionemos dos casos ya vistos: una ecuación de la forma $ax+by+cz+d = 0$ corresponde a una **superficie plana**, mientras que $(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2 = R^2$ corresponde a una superficie esférica. La primera ecuación es lineal en las variables, la segunda es cuadrática. Existen otros tipos de superficies cuya ecuación es de grado 2 en x, y, z: $a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + d\,x + e\,y + f\,z + g = 0$, por ello se denominan **superficies cuádricas**. Dependiendo de los signos y valores relativos de los coeficientes constantes, se generan 6 clases diferentes de cuádricas. Por otro lado, están también las **superficies cilíndricas**, de las que veremos luego algunos ejemplos. Por supuesto, existen superficies más generales cuya expresión no es "tan simple" como las planas, cuádricas o cilíndricas.*
*Para obtener la representación gráfica de una superficie es útil dibujar familias de **trazas**, que son curvas que resultan de la intersección entre la superficie dada y planos paralelos a los planos coordenados. Las ecuaciones de las trazas se obtienen fijando $x = l$ ó $y = m$ ó $z = n$ en las ecuaciones de las superficies.*

Superficies cuádricas

Veamos cuáles son las expresiones y gráficas características de cada tipo de cuádrica. Por simplicidad, ubicamos estas figuras en *forma canónica*, esto es con su *centro* o su *vértice* en el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ y con sus *ejes de simetría* a lo largo de los ejes coordenados (aquí tomamos a lo largo del eje z).

Elipsoide y esfera

La ecuación típica de un elipsoide es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

donde a, b, c (constantes positivas) son los *semiejes*. Tiene *centro* en $C(0,0,0)$, pero no contiene al origen. Las intersecciones con los planos coordenados son elipses, al igual que todas las trazas siempre que $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$. Una característica que la distingue de las otras 5 cuádricas es que se trata de una superficie *cerrada*.

Un caso particular de elipsoide es cuando $a = b = c$ y se trata de una *esfera*.

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

En este caso particular, las trazas son circunferencias.

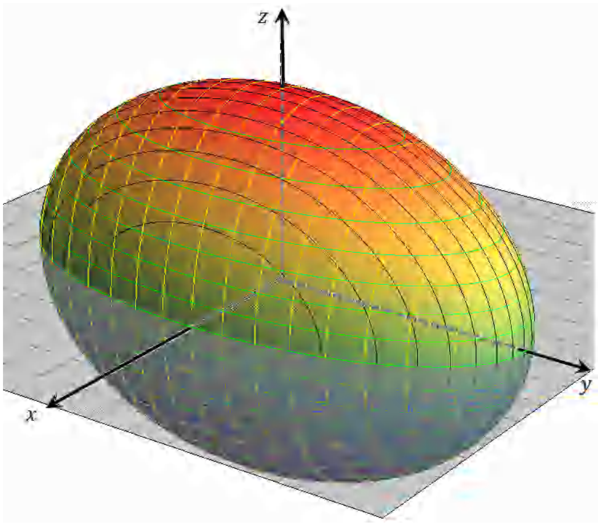


Figura 1.18: Eipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

■ **Ejemplo 1.21** Una lenteja, una pelotita de ping-pong, una pelota de rugby, nuestro planeta tienen forma de elipsoide. Los semiejes de la Tierra miden 6356,523 km (del centro a los polos) y 6378,137 km (del centro a puntos en el Ecuador); las trazas perpendiculares al eje Norte–Sur son los paralelos terrestres (por ejemplo en La Plata estamos sobre la traza que corresponde a una latitud de $-3454'24{,}3040''$); interprete el meridiano de Greenwich como una traza (¿los demás meridianos serán trazas también?).

Otros ejemplos: $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$ puede reescribirse como $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{1} = 1$, luego es la superficie del elipsoide de semiejes 3,2,1 centrado en el origen.

■

Cono elíptico y cono circular

La ecuación típica de un cono elíptico de *eje z* es de la forma

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Las intersecciones con los planos coordenados paralelos al eje (esto es, los planos xz e yz) son dos rectas que se cortan en el *vértice* $V(0,0,0)$, y la intersección con el plano perpendicular al eje (xy) es solamente el punto V. Las trazas en planos paralelos al eje son dos hipérbolas, y en planos perpendiculares al eje son elipses. Es una superficie *abierta*.

Un caso particular de cono elíptico es cuando $a = b$. Se denomina cono circular o cono de revolución.

$$z^2 = \frac{1}{a^2}(x^2 + y^2)$$

En particular, las trazas que se obtienen con planos perpendiculares al eje son circunferencias.

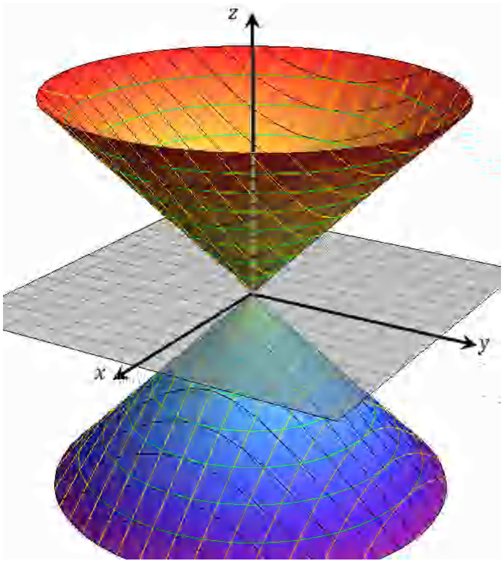


Figura 1.19: Cono elíptico $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

■ **Ejemplo 1.22** [a]

Dos cucuruchos enfrentados por sus vértices forman un cono.

Otros ejemplos: $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ consta de "dos medios conos", con $z = \pm 2\sqrt{x^2 + y^2}$. ■

[a] Al cortar (seccionar) la superficie de un cono con planos de distinta inclinación se obtienen: rectas, elipses o circunferencias, parábolas, e hipérbolas. De aquí que estas curvas reciban el nombre de "secciones cónicas".

Paraboloide elíptico y paraboloide circular

La ecuación típica de un paraboloide elíptico de eje z es de la forma

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

La intersección con los planos coordenados paralelos al eje (xz e yz) es una parábola con *vértice* $V(0,0,0)$, y la intersección con el plano perpendicular al eje (xy) es solamente el punto V. Las trazas en planos paralelos al eje son parábolas con ramas hacia arriba, y en planos perpendiculares (para $z > 0$) son elipses. La gráfica está en el semiespacio superior. Es una superficie *abierta*. La constante c en este caso puede tener un valor negativo, lo que implica que las ramas abren hacia abajo y la gráfica está en el semiespacio inferior.

Un caso particular de paraboloide es cuando $a = b$. Se denomina paraboloide circular o paraboloide de revolución.

$$z = \frac{c}{a^2}(x^2 + y^2)$$

En particular, las trazas que se obtiene usando planos perpendiculares al eje son circunferencias.

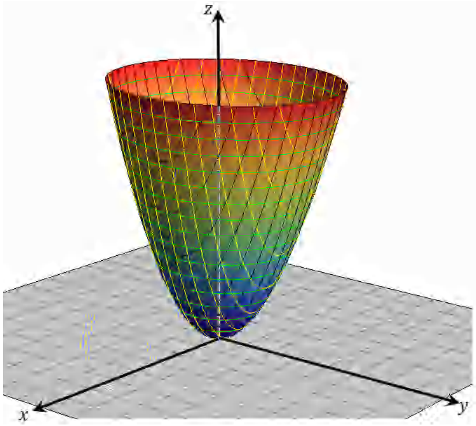


Figura 1.20: Paraboloide elíptico $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

■ **Ejemplo 1.23** La superficie de un fluido que está girando (por ejemplo al revolver el café en la taza), una antena de TV satelital, los espejos de los telescopios forman un paraboloide elíptico.
Otros ejemplos: $z = 4(x^2 + y^2)$ ■

Paraboloide hiperbólico

La ecuación típica de un paraboloide hiperbólico de eje z es de la forma

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

La intersección con el plano coordenado xz es una parábola con ramas hacia arriba y *vértice* $V(0,0,0)$, mientras que con el plano coordenado yz es otra parábola con ramas hacia abajo; la intersección con el plano coordenado perpendicular al eje (xy) son dos rectas que se cortan en V. Las trazas en planos paralelos al eje son parábolas (con ramas hacia arriba en $y = m$, o ramas hacia abajo en $x = l$), y en planos perpendiculares son hipérbolas. Es una superficie *abierta*. El punto V recibe el nombre de *punto silla* o *punto de ensilladura*. La constante c puede tomar un valor negativo.

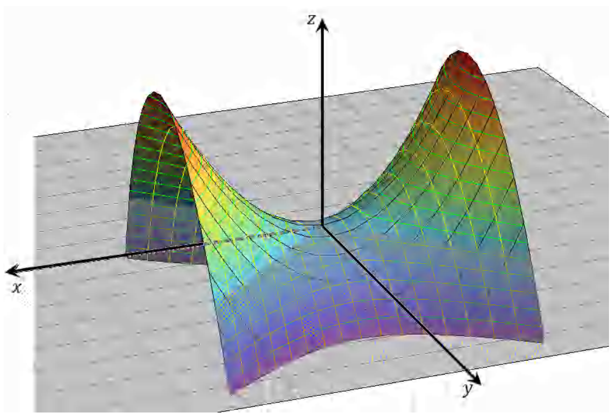


Figura 1.21: Paraboloide hiperbólico $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

■ **Ejemplo 1.24** Una silla de montar a caballo tiene forma de paraboloide hiperbólico (de ahí el nombre para el punto V), también unas conocidas papas fritas de tubo, un lomo de burro muy gastado por el tránsito...
Otros ejemplos: $z = 4(x^2 - y^2)$ y $z = 4(y^2 - x^2)$ (¿cuál es la diferencia entre estas superficies?).
■

Dada una ecuación cuadrática en las variables x, y, z, para identificar si se trata de una superficie cuádrica y clasificarla según la lista dada, debemos prestar atención a cuáles son las variables con potencia 1 ó 2, y cuáles son los signos de los coeficientes que las acompañan. También podemos observar si la ecuación tiene o no un término constante: la ecuación del elipsoide tiene un término constante, lo que implica que $O(0, 0, 0)$ NO satisface la ecuación, dicho en otras palabras esta superficie NO contiene al origen; en cambio, el cono y los paraboloides (en forma canónica) SÍ contienen al vértice (el origen).

Como mencionamos, hemos dado las formas canónicas de las cuádricas presentadas. Podemos encontrarnos con una superficie que tenga alguna de estas formas pero que esté orientada o tenga su eje en otra dirección. Algunos ejemplos (justifique, comparando con las formas canónicas):
$x^2 = 3y^2 + 4z^2$ es un cono elíptico de eje x; $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$ es la superficie esférica de radio 3 centrada en el punto $(0, 1, 2)$; $(z - 1)^2 = x^2 + y^2$ corresponde a un cono con vértice $(0, 0, 1)$ (¿con qué orientación?); el paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ abre hacia abajo, con vértice en $(0, 0, 16)$; . . .

■ **Ejemplo 1.25** Clasificar y graficar la superficie de ecuación $x^2 - y^2 + z^2 = 0$. Determinar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la superficie: $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(1, 2, 1)$, $D(3, 5, 4)$, $E(-3, -5, -4)$.

La ecuación de la superficie puede reescribirse como $y^2 = x^2 + z^2$. Notamos que no hay término constante, que las 3 variables están elevadas al cuadrado, y que dos llevan el mismo signo, luego se trata de una superficie cónica. Tiene eje y. Podemos agregar, además, que se trata de un cono circular (o de revolución) dado que los coeficientes de las otras dos variables, x, z, son iguales (valen 1).
Las trazas perpendiculares al eje se obtienen fijando $y = m$, o sea son las circunferencias de la forma

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = m^2 \\ y = m \end{cases}$$

para cada $m \in \mathbb{R}$. Las trazas en $x = l$ y en $z = n$ son hipérbolas.
Los puntos O, A, D y E satisfacen la ecuación del cono dado, mientras que los puntos B y C no pertenecen a la gráfica, pues (por ejemplo) $1^2 - 1^2 + 0^2 = 0$ se verifica para A, mientras que para C no: $1^2 - 2^2 + 1^2 \neq 0$. ■

Superficies cilíndricas

Veamos algunos ejemplos de las llamadas superficies cilíndricas.
El conjunto de puntos en el espacio que satisface la ecuación

$$x^2 + y^2 = 2$$

sin aclarar nada acerca de los valores que puede tomar z, genera el *cilindro circular recto* de eje z y radio $\sqrt{2}$ (se puede pensar como una sucesión de circunferencias apoyadas una encima de otra, para todo z); para visualizar esta superficie podemos pensar en un tubo de rollo de cocina (infinitamente largo).

Otro ejemplo es la ecuación

$$z = x^2$$

En este caso, los puntos de la forma (x, m, x^2) generan en el plano $y = m$ una parábola de eje z y ramas hacia arriba; tomando todos los valores reales de m se genera un *cilindro parabólico*. ¿Cuál es la diferencia con la superficie de ecuación $z = y^2$? ¿Y con $z = 1 - x^2$?

Grafique las superficies cilíndricas dadas.

EJERCICIOS

1. Haga un listado de objetos cuya superficie sea alguna de las cuádricas. Identifique las características de la superficie (el o los ejes de simetría, los semiejes, el vértice o centro si tiene, si es abierta o cerrada, si es de una o dos hojas).
   Intente construir algunas de ellas, y marque sobre el objeto las trazas paralelas y perpendiculares al eje (imagine que va rebanando ese objeto, cortando tajadas horizontales o verticales).
2. Dé un ejemplo de cada superficie cuádrica. Esboce la gráfica a mano alzada. Grafique algunas cuádricas utilizano programas de cálculo que permiten visualizar superficies (como GeoGebra, Mathematica, Maple, Maxima, a los que puede acceder por ejemplo en la Sala de PC de la Biblioteca).
3. Reescriba las ecuaciones para cada tipo de superficie cuádrica, cambiando el eje de simetría. Explique la figura obtenida (por ejemplo: un paraboloide elíptico de eje y, "acostado", es lo que corresponde a la ecuación $y = 3x^2 + 8z^2$).
4. Considere las siguientes cuádricas: $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = x^2 + y^2$. Obtenga y compare las ecuaciones de las trazas horizontales de ambas superficies para $z = 0, 1, 4$ y 9. Proyecte las trazas en el plano xy (realice estos gráficos en computadora y consérvelos, los usaremos más adelante).
5. *a*) Considere un colador chino (o un embudo) apoyado boca abajo sobre una mesada. Tomando $z = 0$ al nivel de la mesada, escriba una ecuación que describa el colador.
   b) Imagine que sostiene en su mano un paraguas con forma de paraboloide (de revolución); escriba una ecuación que lo describa, tomando el piso como $z = 0$.
6. A partir del paraboloide $S_0 : \ z = x^2 + y^2$, grafique y obtenga las ecuaciones de las siguientes superficies que corresponden a traslados o a dilataciones respecto de S_0:
   a) S_1 : tiene el vértice en $(0, 0, 2)$
   b) S_2 : tiene el vértice en $(3, 3, 2)$
   c) S_3 : abre hacia abajo
   d) S_4 : abre hacia abajo y tiene el vértice en $(0, 0, 4)$
7. Estudie la definición general de cilindro y dé algunos ejemplos.

1.8 Otros sistemas de coordenadas

Un vaso de precipitado posee una escala graduada en el sentido vertical; si quisiéramos localizar una partícula flotando en un líquido dentro de ese vaso, bastaría dar su altura, la distancia al eje de ese vaso y una orientación. El conjunto de puntos del espacio que distan del origen en 3 unidades queda bien descripto dando el número 3; y si queremos referirnos al subconjunto de aquellos puntos P que están en el semiespacio superior podemos agregar el dato de que el ángulo entre el eje z positivo y el vector posición $\overrightarrow{OP}$ *esté entre 0 y* $\frac{\pi}{2}$. *Observar que no hemos mencionado las coordenadas cartesianas de los puntos, sino que dimos descripciones alternativas usando otras "características".*

En casos como éstos, resulta más conveniente (fácil) trabajar en sistemas de coordenadas diferentes de las coordenadas cartesianas x, y ó x, y, z. Esto es particularmente útil cuando la región sobre la que se trabaja presenta ciertas ***simetrías****. Efectivamente, en problemas que presentan "simetría* *circular" en el plano conviene utilizar las **coordenadas polares** r, θ; mientras que problemas en el espacio con la simetría de un cilindro circular recto o de una esfera resulta más fácil tratarlos en **coordenadas cilíndricas** r, θ, z o en **coordenadas esféricas** ρ, θ, ϕ, respectivamente. Veamos cómo expresar diferentes regiones en los distintos sistemas de coordenadas: aprovechando que ya vimos cómo se expresan en coordenadas cartesianas, necesitamos entonces conocer las reglas de **cambio** o **transformación de coordenadas**.*

Sistema de coordenadas polares en el plano

Las coordenadas polares de un punto P del plano son la distancia r al origen y el ángulo θ desde el semieje x positivo a la dirección $\overrightarrow{OP}$ en sentido antihorario (ver Figura 1.22). Si el punto P tiene

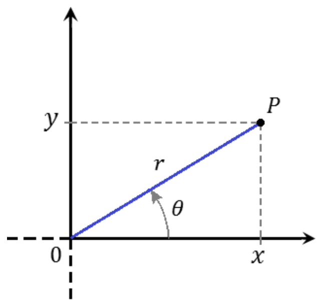


Figura 1.22: Sistema de coordenadas polares en el plano.

coordenadas cartesianas (x, y), con $x \neq 0$, entonces sus coordenadas polares (r, θ) se obtienen como

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\theta &= y/x \end{cases}$$

Estas ecuaciones dan el cambio o *transformación de coordenadas cartesianas a polares*. Por ejemplo, el punto $P(1, 1)$ tiene coordenadas polares $r = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$. La transformación inversa, de coordenadas polares a cartesianas, es

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Por ejemplo, el punto con $r = 2$ y $\theta = \frac{3}{2}\pi$ es el $(0, -2)$. Observamos que, mientras las variables cartesianas x e y toman cualesquiera valores reales, las variables polares están restringidas a: $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

El origen O es el punto que satisface $r = 0$, para cualquier θ. Todo el semieje x positivo verifica $\theta = 0$, y el semieje x negativo es $\theta = \pi$; mientras que la ecuación $\theta = \frac{\pi}{2}$, con r arbitrario, describe el semieje y positivo. El semiplano superior (sin el eje x) está dado por $r > 0$ y $0 < \theta < \pi$. Los puntos del primer cuadrante forman el conjunto $\{(r, \theta) : r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

El segmento en la bisectriz del primer cuadrante, a más de 2 unidades y menos de 4 del origen, está dado por el conjunto $\{(r, \theta) : 2 < r < 4,\ \theta = \frac{\pi}{4}\}$. El conjunto de puntos del plano que distan del origen en 3 o menos unidades, se escribe como la desigualdad $r \leq 3$ y su representación gráfica es el círculo de radio 3 centrado en O. Graficar el segmento y el círculo.

Veamos ahora algunas expresiones generales:

- Los puntos que satisfacen $r = R$ (para algún R fijo, estrictamente positivo), con $\theta \in [0, 2\pi)$, corresponden a la *circunferencia* de radio R centrada en el origen; efectivamente, transformando a cartesianas se tiene $r = \sqrt{x^2 + y^2} = R$, o sea $x^2 + y^2 = R^2$.

- Los puntos que satisfacen $\theta = \alpha$ (para algún α fijo, entre 0 y 2π), con $r \geq 0$, corresponden a la *semirrecta* que "sale" del origen y forma un ángulo α a partir del semieje x positivo, en sentido antihorario; de hecho, transformando a cartesianas se tiene $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$, o sea $y = mx$ donde $m = \operatorname{tg}\alpha$.

- El *círculo* de radio R centrado en el origen se escribe: $r \leq R$; una *corona circular* entre los radios R_1 y R_2 se escribe: $R_1 \leq r \leq R_2$; un *sector (angular)* entre los ángulos α_1 y α_2 se escribe: $\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$; mientras que $R_1 \leq r \leq R_2$, $\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$ define un *sector de corona circular*.

Dé ejemplos y grafique. Observe que estas regiones del plano, que "tienen la simetría del círculo", se expresan de manera mucho más sencilla en coordenadas polares que en cartesianas; aprovecharemos esta simplicidad.

■ **Ejemplo 1.26**

1. ¿Cómo se expresa en coordenadas polares un *sector de corona circular* entre los radios 2 y 3, y entre los ángulos $\dfrac{\pi}{6}$ y $\dfrac{\pi}{3}$? Justificar el nombre de "rectángulo polar" para este tipo de regiones.
2. Recordando que el área de un círculo de radio R es
$$A(\text{circulo}) = \pi R^2,$$
¿cuánto vale el área de un sector de corona circular?
3. Evaluar el área para el ejemplo dado en a), y comparar con el área del rectángulo polar $r \in [3,4], \theta \in [\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}]$. Analizar el resultado.

El sector de corona circular dado es el conjunto $\{(r,\theta) : 2 \leq r \leq 3, \dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}\}$. Dado que los límites para r y para θ son fijos, por analogía con la definición usual de rectángulo cartesiano se lo puede denominar "rectángulo polar" (aunque la gráfica de la región NO es precisamente un rectángulo en el plano xy !!).

2. Por un lado, para una corona circular entre R_1 y R_2 (con $R_1 < R_2$), su área es la diferencia entre las áreas de los círculos, esto es
$$A(\text{corona circular}) = \pi(R_2^2 - R_1^2)$$
(casos límite: para $R_1 = 0$ da el área del círculo completo de radio R_2; para $R_1 = R_2$ la corona se reduce a una circunferencia, que tiene área nula).
Por otro lado, para un sector angular de radio R y que abarca un ángulo α, su área es
$$A(\text{sector angular}) = \frac{1}{2}\alpha R^2$$
(casos límite: para $\alpha = 2\pi$ da el área de todo el círculo; para $\alpha = 0$ da área nula). Luego el área de un sector de corona circular será
$$A(\text{sector de corona circular}) = \frac{1}{2}\alpha(R_2^2 - R_1^2)$$
3. Para el ejemplo dado en a), tenemos $R_1 = 2, R_2 = 3$ y $\alpha = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$; luego el área da $\dfrac{5}{12}\pi$. Mientras que el sector entre los mismos ángulos pero desde $R_1 = 3$ hasta $R_2 = 4$, tiene un área mayor: $\dfrac{7}{12}\pi$. Estos dos "rectángulos polares" NO tienen la misma área,

aún cuando $R_2 - R_1 = 1$ en ambos casos.
Dibujar ambos sectores y observar gráficamente cómo se agranda la región (para un dado ángulo α fijo) al alejarse del origen.

■

■ **Ejemplo 1.27** 1. Escribir en coordenadas polares la ecuación de la circunferencia de radio 4 y centro en $C(0, 4)$.
2. Idem con centro en $D(4, 0)$.
3. Comprobar que la expresión general para una circunferencia descentrada una distancia exactamente igual a su radio en el sentido $+y$ es: $r = 2R \operatorname{sen}\theta,\ \theta \in [0, \pi]$; y en el sentido $+x$ es: $r = 2R\cos\theta,\ \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Graficar.

En cartesianas tenemos $x^2+(y-4)^2 = 16$. Para pasar a polares usamos la transformación $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. Luego queda $(r\cos\theta)^2+(r\operatorname{sen}\theta-4)^2 = 16$, o sea $r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta - 8r\operatorname{sen}\theta + 16 = 16$, que simplificando resulta $r^2 - 8r\operatorname{sen}\theta = 0$, ó $r(r - 8\operatorname{sen}\theta) = 0$. Las soluciones son $r = 0$ (el origen) y $r = 8\operatorname{sen}\theta$, donde hay que tener en cuenta que $\operatorname{sen}\theta$ sea positivo, esto es, θ debe restringirse al intervalo $[0, \pi]$ (lo que ya sabíamos: esta circunferencia se encuentra en el semiplano superior).
Verificar que los puntos $(4, 4)$, $(0, 8)$ y $(-4, 4)$ están sobre la curva $r = 8\operatorname{sen}\theta$.

2. Siguiendo un razonamiento similar, la transformación de la ecuación $(x-4)^2+y^2 = 16$ a polares da $r(r-8\cos\theta) = 0$, de donde $r = 0$ ó $r = 8\cos\theta$, con ángulo correspondiente al primer y cuarto cuadrantes (cuyo coseno es positivo), que podemos escribir en la forma $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
Verificar que la curva $r = 8\cos\theta$ pasa por los puntos $(4, 4)$, $(8, 0)$ y $(4, -4)$
3. Aquí se pide hacer la transformación en sentido inverso: de polares a cartesianas. Vemos que si multiplicamos la primera ecuación por r, queda $r^2 = 2Rr\operatorname{sen}\theta$, que pasado a cartesianas da $x^2 + y^2 = 2Ry$ de donde $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$. Completando cuadrados se llega a $x^2 + (y - R)^2 = R^2$.
Resolver el otro caso y graficar ambas circunferencias.

■

Sistema de coordenadas cilíndricas en el espacio

Las coordenadas cilíndricas de un punto P del espacio son la distancia r desde P_I (proyección de P en el plano xy) al origen, el ángulo θ desde el semieje x positivo a la dirección $\overrightarrow{OP_I}$ en el plano xy en sentido antihorario mirado desde $+z$, y la altura z del punto (ver Figura 1.23).

Si el punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y, z), con $x \neq 0$, entonces sus coordenadas cilíndricas (r, θ, z) se obtienen como

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\theta &= y/x \\ z &= z \end{cases}$$

Estas ecuaciones dan la *transformación de coordenadas cartesianas a cilíndricas*. Por ejemplo, el punto $P(1, 1, -7)$ tiene coordenadas cilíndricas $r = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $z = -7$. La transformación inversa, de coordenadas cilíndricas a cartesianas, es

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \\ z &= z \end{cases}$$

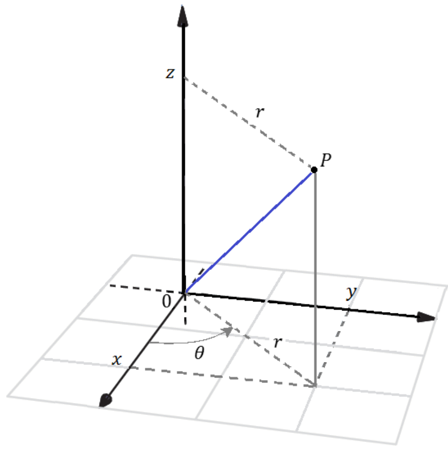


Figura 1.23: Sistema de coordenadas cilíndricas en el espacio.

Observamos que, mientras las variables cartesianas x, y, z toman todos los valores reales, las variables cilíndricas están restringidas a: $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Por ejemplo, el punto con $r = 2$, $\theta = \frac{3}{2}\pi$ y $z = \sqrt{3}$, es el $(0, -2, \sqrt{3})$.

Notar que para los puntos en el plano xy, que tienen $z = 0$, las coordenadas cilíndricas r y θ son las mismas que las coordenadas polares de la sección anterior.

El origen O es el punto que satisface $r = 0, z = 0$, para cualquier θ. Todo el semieje x positivo verifica $\theta = 0, z = 0$, y el semieje x negativo es $\theta = \pi, z = 0$; mientras que las ecuaciones $\theta = \frac{\pi}{2}, z = 0$, con r arbitrario, describen el semieje y positivo; el eje z queda determinado por $r = 0$. El plano xz está dado por $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ (¿y el plano yz?). Los puntos del primer octante forman el conjunto $\{(r, \theta, z) : r \geq 0\,,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, z \geq 0\}$.

La franja del plano vertical que divide al medio el primer octante, a más de 2 unidades y menos de 4 del eje z, está dada por el conjunto $\{(r, \theta, z) : 2 < r < 4,\ \theta = \frac{\pi}{4},\ z \geq 0\}$. El conjunto de puntos del espacio que distan del eje z en 3 o menos unidades, se escribe como la desigualdad $r \leq 3$ y su representación gráfica es la superficie más el "interior" de un cilindro circular recto de eje de simetría z y de radio 3. Graficar la superficie y el sólido.

Veamos ahora algunas expresiones generales:

- Los puntos que satisfacen $r = R$ (para algún R fijo, estrictamente positivo), con $\theta \in [0, 2\pi)$ y $z \in (-\infty, +\infty)$, corresponden a la *superficie del cilindro circular recto* de radio R y eje z. Transformando a cartesianas se tiene $r = \sqrt{x^2 + y^2} = R$, o sea $x^2 + y^2 = R^2$, para todo z.

- Los puntos que satisfacen $\theta = \alpha$ (para algún α fijo, entre 0 y 2π), con $r \geq 0$ y $z \in \mathbb{R}$, corresponden al semiplano vertical que "toca" al eje z y forma un ángulo α con el plano xz. Transformando a cartesianas se tiene $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$, o sea el (semi)plano vertical $mx - y = 0$ donde $m = \operatorname{tg}\alpha$.

- El *cilindro* de radio R centrado en el eje z se escribe: $r \leq R$; si tiene una altura dada se escribe también $z_1 \leq z \leq z_2$.

- La ecuación $z = r$ en cilíndricas describe la superficie de un cono circular en el semiespacio superior (efectivamente en cartesianas se tiene $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, o sea $z^2 = x^2 + y^2$ recordando que z era positivo).

Dé ejemplos y grafique. Observe que estas regiones del espacio, que "tienen la simetría del cilindro", se expresan de manera mucho más sencilla en coordenadas cilíndricas que en cartesianas; aprovecharemos esta simplicidad.

■ **Ejemplo 1.28** Describir todos los puntos del espacio que son interiores al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, entre el paraboloide elíptico $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 4$. Graficar. Estimar el volumen del sólido (lo calcularemos exactamente más adelante, en el Capítulo 5).

Dada la simetría de este sólido, resulta muy sencillo expresarlo en coordenadas cilíndricas. Efectivamente, la frontera del sólido está constituida por la unión de parte de las superficies $S_1 : r = 1$, $S_2 : z = 1 - r^2$, y $S_3 : z = 4$. Luego el sólido es el conjunto de puntos $E = \{(r, \theta, z) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 1 - r^2 \le z \le 4\}$.
Una estimación para el volumen de E es algún valor entre el volumen de un cilindro de altura 3 (que va desde el vértice del paraboloide a la tapa en $z = 4$), y el de un cilindro de altura 4; recordando que el volumen de un cilindro de radio R y altura h es

$$\text{Vol(cilindro)} = \pi R^2 h,$$

entonces $\text{Vol}(E)$ debe estar entre 3π y 4π.

■

Sistema de coordenadas esféricas en el espacio

Las coordenadas esféricas de un punto P del espacio son la distancia ρ ("ro") al origen, el ángulo θ desde el semieje x positivo a la dirección $\overrightarrow{OP_I}$ en el plano xy (siendo P_I la proyección de P en dicho plano) en sentido antihorario mirado desde $+z$, y el ángulo ϕ desde el semieje z positivo a la dirección $\overrightarrow{OP}$ (ver Figura 1.24). Si el punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y, z), con $x \neq 0$,

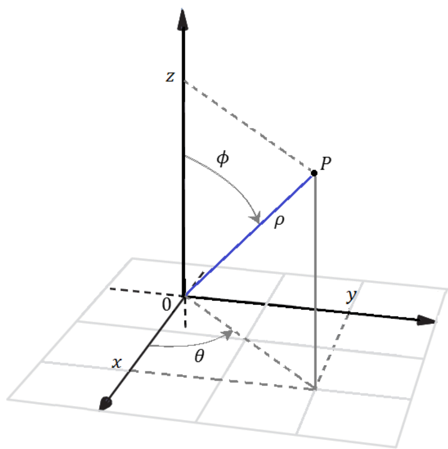


Figura 1.24: Sistema de coordenadas esféricas en el espacio.

entonces sus coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) se obtienen como

$$\begin{cases} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \operatorname{tg}\theta &= y \;/\; x \\ \cos\phi &= z \;/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

Estas ecuaciones dan la *transformación de coordenadas cartesianas a esféricas*. Por ejemplo, el punto $P(-1, 1, \sqrt{2})$ tiene coordenadas esféricas $\rho = 2$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$, $\phi = \frac{\pi}{4}$. La transformación inversa, de coordenadas esféricas a cartesianas, es

$$\begin{cases} x &= \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y &= \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z &= \rho \cos\phi \end{cases}$$

Por ejemplo el punto con $\rho = 2$, $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$, es el $(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{6}, \sqrt{2})$. Observamos que, mientras las variables cartesianas x, y, z toman cualquier valor real, las variables esféricas están restringidas a: $\rho \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi$ (¿por qué no es necesario tomar valores de ϕ entre π y 2π?). Notar que $\rho \operatorname{sen}\phi$ corresponde a la coordenada cilíndrica r; además, para los puntos del plano xy, las coordenadas esféricas ρ y θ son las mismas que las coordenadas polares r y θ. [3]

El origen O es el punto que satisface $\rho = 0$, para cualquier θ y ϕ. El semieje x positivo verifica $\theta = 0, \phi = \frac{\pi}{2}$ y el negativo es $\theta = \pi, \phi = \frac{\pi}{2}$; mientras que las ecuaciones $\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = \frac{\pi}{2}$, con ρ arbitrario, describen el semieje y positivo; el semieje $+z$ queda determinado por $\phi = 0$, mientras que el semieje z negativo es $\phi = \pi$ en esféricas. El plano xz está dado por $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$, ¿y el plano yz?

Consideremos por ejemplo el conjunto de puntos del espacio que distan del origen en 3 o menos unidades, esto se escribe como la desigualdad $\rho \leq 3$ y su representación gráfica es una esfera de radio 3 centrada en el origen.

Veamos ahora algunas expresiones generales. Los puntos que satisfacen $\rho = R$ (para algún R fijo, estrictamente positivo), con $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\phi \in [0, \pi]$, corresponden a la superficie esférica de radio R. Efectivamente, transformando a cartesianas se tiene $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$, o sea $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Por otro lado, los puntos que satisfacen $\theta = \alpha$ (para algún α fijo, entre 0 y 2π), con $\rho \geq 0$ y $\phi \in [0, \pi]$, corresponden al semiplano vertical que "toca" al eje z y forma un ángulo α con el plano xz. La ecuación $\phi = \alpha$ (para algún α fijo, menor que $\pi/2$) describe la superficie de medio cono circular, en el semiespacio superior

■ **Ejemplo 1.29** Dibuje el sólido descripto por las desigualdades:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}$, $0 \leq \rho \leq \sec\phi$

En este ejemplo, el uso de valores negativos de θ indica ángulos tomados respecto del plano xz en sentido antihorario (mirando desde $+z$). Otra forma de expresar la misma región es: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ó $\pi \leq \theta < 2\pi$. Por el rango de variación de las variables angulares, sabemos que esta región sólida se encuentra en el semiespacio con x positivo, y que se encuentra"cerca" del eje $+z$, a no más de 30 grados de inclinación, lo que sugiere que podría tratarse de una región cónica.

Además, sospechamos que la región sólida es cerrada, ya que la variable radial ρ está limitada. Para identificar el límite superior para ρ, es conveniente transformar a coordenadas cartesianas la relación $\rho \leq \sec\phi$, que se puede escribir como $\rho \leq 1/\cos\phi$. Luego queda $\rho\cos\phi \leq 1$, pero $\rho\cos\phi$ es z. Finalmente deducimos que debe ser $z \leq 1$.

Se trata de una parte de un cono "relleno" de ángulo $\frac{\pi}{6}$ respecto de su eje, en el semiespacio

[3] En física, es más común designar con "ϕ" al ángulo que está en el plano xy, y con "θ" al ángulo respecto del eje $+z$, o sea, al revés de lo que hacemos aquí. Sin embargo, esto no afecta los cálculos. Simplemente se debe tener cuidado de estar usando la notación adecuada en cada contexto y, en caso de trabajar en ambos contextos, hacer el cambio $\theta \leftrightarrow \phi$ donde sea necesario.

x positivo, hasta altura $z = 1$.

■

Ejercicios

1. Muestre que la ecuación de la circunferencia de radio 4 y centro en $x = 1$, $y = 2$, está dada en coordenadas polares por $r^2 - 2r(\cos\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta) - 11 = 0$.
2. *a*) Exprese los siguientes puntos en coordenadas cilíndricas:
   $A(0, 5, 1)$, $B(1, \sqrt{3}, 4)$, $C(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4)$, $D(-3, 2, -1)$
   b) Exprese los siguientes puntos en coordenadas esféricas:
   $A(4, 0, 0)$, $B(-2, 2\sqrt{3}, 4)$, $C(2, 2, 4\sqrt{2})$, $D(-4, 0, 0)$
3. Describa en coordenadas cilíndricas: a) la semiesfera centrada en O de radio 2, por encima del plano xy; b) la superficie esférica centrada en O de radio 3, en el primer cuadrante; c) el paraboloide circular con coeficientes $a = b = 4$ y vértice en $V(0, 0, 9)$ que abre hacia abajo.
4. Halle una ecuación en coordenadas cartesianas que corresponda a las siguientes ecuaciones en esféricas: a) $\rho = 2$; b) $\theta = \frac{3}{4}\pi$; c) $\phi = \frac{\pi}{6}$; d) $\rho = 2\sec\phi$
5. Escriba cada una de las ecuaciones siguientes en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas: a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; b) $x^2 + y^2 = 4$
6. Dibuje el sólido que consiste en todos los puntos con coordenadas esféricas tales que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6}$, $0 \leq \rho \leq 2\cos\phi$.

1.9 Actividades integradoras y autoevaluación

Actividades integradoras

1. Una persona camina, a partir de cierta ubicación inicial, sucesivamente 50 m hacia el este, 30 m hacia el sur, 20 m hacia el oeste y 10 m hacia el norte. Modele esta situación en un plano coordenado. Escriba los vectores desplazamiento asociados a cada uno de los trayectos. Determine gráfica y analíticamente el vector desplazamiento total, entre el punto inicial y final del recorrido. ¿Cuál es la distancia total recorrida por la persona?
2. Pruebe que para cualesquiera $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$, se verifica la propiedad de distributividad de los productos escalar y vectorial respecto de la suma de vectores:
   a) $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$
   b) $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$
3. Resuelva el Ejemplo 4, para $\vec{u} = (u_1, u_2)$ arbitrario (no nulo).
4. Halle un vector unitario $\breve{u}$ que sea perpendicular a las rectas $L_I : x = 4 - t, y = 3 + 2t, z = 1 + 5t$ y $L_{II} : x = -3 + 7s, y = -2 + s, z = 1 + 2s$
5. Obtenga ecuaciones paramétricas para la recta intersección entre los planos $\Pi_I : 3x + 2y + z = 12$ y $\Pi_{II} : x - 4y + 2z = 0$
6. Dos puntos determinan una recta, mientras que tres puntos no alineados determinan un plano (¿por qué?). Elija 3 puntos cualesquiera del espacio; verifique que no estén alineados y explique de qué manera puede hallar una ecuación del plano a partir de esos datos.
7. Estudie cómo se define la distancia entre un punto y una recta, y entre un punto y un plano. Seleccione un ejercicio de cada tipo de la bibliografía disponible, y resuélvalos.
8. Analice justificadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ corresponde a una circunferencia tanto en el plano coordenado xy como en el espacio.
9. Resuelva los Ejercicios 2 y 5 de la Sección 1.2, para un sistema tridimensional. Asocie estas respuestas con las soluciones encontradas en el caso bidimensional.
10. ¿Qué regiones del espacio corresponden a cada una de las siguientes ecuaciones?
    a) $x^2 + y^2 = 0$; b) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; c) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$; d) $x^2 - y^2 = 0$

11. Discutan en pequeños grupos los siguientes ejercicios:
    a) Stewart, *Conceptos y Contextos* (3a ed.), pag. 683-684: Ejercicios 2 y 15 de la Sección 9.6
    b) Stewart, *Trascendentes Tempranas* (6a ed.), pag. 811: Ejercicios 21–28 de la Sección 12.6
    c) Larson–Hostetler–Edwards, *Cálculo II* (7a ed.), pag. 123: Ejercicios 1–6 de la Sección 10.6
    d) Larson–Hostetler–Edwards, *Cálculo II* (7a ed.), pag. 131: Ejercicios 81–86 de la Sección 10.7
12. Muestre que un sector de corona circular "pequeño" tiene un área aproximada $R\,\Delta R\,\Delta\theta$, siendo $R_1 = R$, $R_2 = R + \Delta R$, $\theta_1 = \alpha$, $\theta_2 = \alpha + \Delta\theta$ los límites de la región.
13. ¿Cómo describiría matemáticamente un cucurucho con una bocha de helado arriba? (más adelante veremos cómo calcular el volumen, y por lo tanto sabremos cuánto helado contiene)
14. Grafique la superficie de "medio" cono circular de eje z, sabiendo que el vértice está en $O(0, 0, 0)$ y que contiene al punto $P_0(1, 0, 1)$. Escriba ecuaciones para esta superficie, usando coordenadas: a) cartesianas, b) cilíndricas, y c) esféricas. ¿Qué ecuaciones le parecen más sencillas?
15. Identifique la curva intersección entre las superficies $z = \operatorname{sen}\theta$ y $r = 1$ (dadas en coordenadas cilíndricas). Grafique.
16. Identifique la curva intersección entre las superficies $\rho = 2\sec\phi$ y $\rho = 4$ (dadas en coordenadas esféricas). Grafique.

Autoevaluación Capítulo 1

Se propone que resuelva los siguientes ejercicios (del estilo de los que podrían plantearse en un parcial de la materia), en forma individual y dedicando aproximadamente 30 minutos en total. Justifique cada uno de los pasos en sus demostraciones teóricas; los cálculos numéricos puede dejarlos expresados (no es necesario el uso de la calculadora, a menos que necesite comparar valores numéricos). Coteje los resultados obtenidos con las respuestas dadas.

1. Sean a, b, c números reales fijos, estrictamente positivos. La ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ representa un plano en el espacio, del cual puede verse en el primer octante un triángulo. Encuentre los vértices de ese triángulo. Muestre que la proyección de los puntos de dicho triángulo en el plano xy es la región $\{(x, y) :\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le -\frac{b}{a}x + b\} \subset \mathbb{R}^2$. Dé un ejemplo y grafique tanto el plano como su proyección en xy.
2. Clasifique y esboce las gráficas de las siguientes superficies cuádricas:

$$S_1 : \quad z = 3 - x^2 - y^2, \qquad S_2 : \quad z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \qquad S_3 : \quad z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

   Escriba, en cada caso, las ecuaciones para las trazas horizontales que corresponden a $z = 0, 1, 2, 3$. Proyecte en el plano xy las curvas obtenidas y compare.
3. *a*) Exprese en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares, la ecuación de la circunferencia de radio 2 y centro en $(0, 2)$.
   b) Exprese en coordenadas cartesianas y en coordenadas cilíndricas, la ecuación de la superficie de un cilindro circular recto de eje vertical, que corta al plano xy en la circunferencia de radio 2 y centro en $(0, 2)$.