Universidad Nacional de La Plata – Facultad de Ciencias Exactas
**ANÁLISIS MATEMÁTICO II (CiBEx - Física Médica)**
(2013 – Segundo Semestre)

**GUÍA Nro. 4: EXTREMOS Y PUNTOS SILLA
DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES**

# 1. Puntos críticos de una función de $n$ variables

*Supongamos que se quiere estudiar el comportamiento de una función $F(x)$ de una variable, para lo cual será conveniente hallar sus máximos y mínimos locales. ¿Cómo procedemos para hallar los extremos locales de $F$?*
*Teniendo en cuenta lo estudiado en Análisis Matemático I, primero tendríamos que buscar los puntos críticos de $F$, es decir aquellos valores de $x$ para los que la derivada primera, o se anula o no existe. ¿Qué representan los puntos críticos? ¿Por qué es útil conocerlos? Una vez que hemos encontrado todos los puntos críticos debemos estudiar cómo cambia la función alrededor de cada uno de ellos para ver si se trata de un extremo o no, y en el caso de que sea un extremo, si es un máximo o un mínimo.*

Pensemos ahora en una función $f$ de varias variables, ¿cómo pueden determinarse los extremos locales de $f$? ¿Será conveniente extender la noción de punto crítico? En una variable, como vimos, juega un rol muy importante la derivada de la función. En varias variables, para analizar la "razón de cambio" de una función se ha introducido en la guía anterior el concepto de derivadas parciales y aun más, también se han definido las derivadas direccionales. Veremos que la idea de punto crítico puede ampliarse a funciones de varias variables, donde las derivadas parciales primeras son una herramienta muy útil a la hora de localizar máximos y mínimos de funciones. Comencemos definiendo un punto crítico, también llamado punto estacionario, de una función de $n$ variables.

**DEFINICIÓN:**
Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ perteneciente al dominio de $f$ es un *punto crítico* o *punto estacionario* de $f$ si todas las derivadas parciales primeras se anulan en dicho punto, o si al menos una de estas derivadas no existe en el punto.

# 2. Extremos y puntos silla de funciones de dos variables

## 2.1. Generalidades

Trabajaremos en particular con funciones de dos variables. Existen algunos términos y conceptos ya conocidos del curso de Análisis I, que serán de utilidad en esta sección, pero hay otros que son nuevos.

**DEFINICIÓN:**
Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Se dice que $f$ tiene un *máximo relativo* o *local* en $(x_M, y_M) \in \mathcal{D}$, si $f(x_M, y_M) \geq f(x, y)$ para todo punto $(x, y)$ de algún disco centrado en $(x_M, y_M)$. Si la desigualdad se verifica para todo punto del dominio, se dice que el máximo es *absoluto* o *global*.

De manera análoga, se dice que $f$ tiene un *mínimo relativo* o *local* en $(x_m, y_m) \in \mathcal{D}$, si $f(x_m, y_m) \leq f(x, y)$ para todo punto $(x, y)$ de algún disco centrado en $(x_m, y_m)$. Si la desigualdad se verifica para todo punto del dominio, se dice que el mínimo es *absoluto* o *global*.

Si $f$ tiene un máximo relativo en $(x_M, y_M)$, el valor que toma la función en $(x_M, y_M)$ es el MAYOR valor que toma $f$ para cualquier punto en los alrededores de $(x_M, y_M)$, y para cualquier punto del dominio si es un máximo absoluto. Mientras que si $f$ tiene un mínimo relativo en $(x_m, y_m)$, el valor de $f$ en $(x_m, y_m)$ es el MENOR.

Los máximos y mínimos relativos se llaman, en general, *extremos relativos* o *locales* de $f$.

Una función (no constante) de dos variables puede tener uno o varios extremos relativos, o ninguno. Piense por ejemplo en las funciones de una variable: $F(x) = x^2$ ó $F(x) = x^3$, para $x \in \mathbb{R}$. La primera tiene solamente un mínimo local (y absoluto), mientras que la segunda no tiene ni máximo ni mínimo local (ni absoluto por ende) en $\mathbb{R}$.

El siguiente teorema asegura que todo extremo local es un punto crítico. Sin embargo, no todo punto crítico es un extremo. Para hallar extremos de una función, se deberá buscar primero todos los puntos críticos; de esa forma, se tendrán todos los "candidatos a extremos", pero habrá que clasificarlos (si son o no extremo, o si son "otra cosa").

**TEOREMA:**
Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables. Si $f$ tiene un máximo o mínimo local en $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ y existen las derivadas parciales primeras de $f$ en dicho punto, entonces $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$

De este teorema también se puede deducir que si la gráfica de $f$ admite plano tangente en un máximo o mínimo local, entonces dicho plano es horizontal, $\Pi_T : z = f(x_0, y_0)$.

Veamos algunos ejemplos típicos de funciones de dos variables, para los que buscaremos extremos de manera intuitiva, haciendo un análisis de la función y aplicando métodos gráficos.

> **EJEMPLO 1:** Hallar, si existen, los máximos y mínimos locales de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 12$ utilizando procedimientos gráficos. Si $f$ posee extremos calcule, si existen, $f_x$ y $f_y$ en cada extremo hallado. Para cada extremo, determinar el plano tangente a la superficie gráfica de la función, $S : z = f(x, y)$.
>
> *La función dada está bien definida para cualquier par* $(x, y)$ *de números reales, por lo que su dominio será todo* $\mathbb{R}^2$. *¿Cuál es la imagen de* $f$*? Completando cuadrados, la función dada se puede reescribir como* $f(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + 2$ *(verifíquelo). Observamos entonces que la imagen de* $f$ *será el intervalo* $[2, +\infty)$.
> *Veamos algunas curvas de nivel. Como sabemos, la curva de nivel de valor* $k$ *es el conjunto de puntos del plano* $xy$ *que satisface* $C_k : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + 2 = k$. *Así, para* $k = 2$ *consiste de un solo punto, que es el punto* $(3, 1)$, *y para* $k > 2$ *es una circunferencia de radio* $\sqrt{k - 2}$ *con centro en* $(3, 1)$. *Si observamos la Figura 1(a) y teniendo en cuenta que a lo largo de cada curva de nivel* $k$ *la función asume el mismo valor* $k$, *notamos que los valores de* $f$ *crecen indefinidamente a medida que nos alejamos (en circunferencias concéntricas) del punto* $(3, 1)$. *Cabe preguntarse: ¿*$f$ *tendrá un*

*mínimo absoluto en* $(3,1)$*?, ¿*$f$ *no posee un valor máximo?*
*Una representación alternativa de una función de dos variables, como ya hemos visto, es su gráfica en el espacio dada por la superficie* $S : z = f(x,y)$*. En este ejemplo la ecuación de la superficie gráfica es* $z-2 = (x-3)^2+(y-1)^2$*, que nos recuerda a una de las cuádricas. Corresponde de hecho a la superficie de un paraboloide de eje* $z$*, con vértice en* $V(3,1,2)$ *y que abre hacia arriba, como se muestra en la Figura 1(b). Confirmando lo sugerido por las curvas de nivel, observamos que la función dada tiene un mínimo local y absoluto en* $(3,1)$ *y que no posee máximos locales (entonces tampoco absolutos). El valor mínimo de* $f$ *es* $f(3,1) = 2$*.*

*Veamos ahora, ¿cuál es el valor de las derivadas parciales en* $(3,1)$*? Tenemos que* $f_x(x,y) = 2x-6$ *y* $f_y(x,y) = 2y-2$*. Evaluando ambas funciones en* $(3,1)$ *resulta* $f_x(3,1) = f_y(3,1) = 0$*. O sea que* $(3,1)$ *es un punto crítico o punto estacionario de* $f$*, y es el único (ya que* $f_x$ *se anula solamente para* $x = 3$ *y* $f_y$ *para* $y = 1$*).*
*Por otro lado, como* $f$ *es diferenciable (justifíquelo), existe el plano tangente a la superficie* $S : z = f(x,y)$ *en cualquier punto de la gráfica, en particular en* $(3,1,2)$*, el vértice del paraboloide elíptico. Una ecuación para dicho plano es* $\Pi_T : f_x(3,1)\,(x-3) + f_y(3,1)\,(y-1) - (z-2) = 0$*, y reemplazando valores resulta* $\Pi_T : z-2 = 0$*, que es el plano horizontal que corta al eje* $z$ *en* $(0,0,2)$*. Si representamos gráficamente al paraboloide y al plano* $\Pi_T$*, notamos que para* $(x,y)$ *cerca de* $(3,1)$ *los puntos* $(x,y,f(x,y))$ *del paraboloide se encuentran todos por arriba del plano, indicando que* $f(x,y) \geq 2$*. Como* $f(3,1) = 2$*, entonces* $f(x,y) \geq f(3,1)$*, confirmando que* $(3,1)$ *es un mínimo local. De hecho, esto ocurre no sólo en los alrededores de* $(3,1)$ *sino en todo el dominio de* $f$ *por lo que el mínimo es absoluto.*

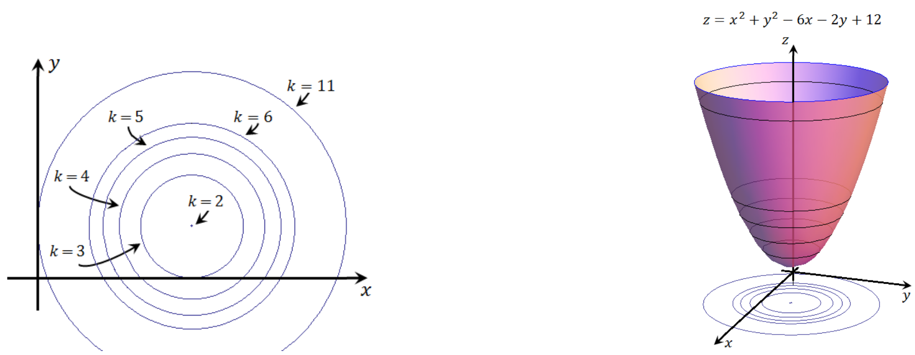


Figura 1: $f(x,y) = x^2+y^2-6x-2y+12$. (a) Curvas de nivel. (b) La función tiene un mínimo local y absoluto en $(3,1)$.

**EJEMPLO 2:** Analizar los valores extremos de $f(x,y) = |x|$.

*Se trata de una función de dos variables que está definida en todo* $\mathbb{R}^2$*, mientras que su imagen es* $[0,+\infty)$*. La traza con el plano vertical* $y = 0$*, es la curva quebrada* $z = |x|$ *en el plano* $xz$*. Una curva similar en el plano* $y = b$*, será la traza para cualquier* $b \in \mathbb{R}$*. O sea que* $S : z = |x|$ *es una superficie conformada por dos semiplanos que forman un ángulo o quiebre en todos los puntos del eje* $y$*. Dibuje.*
*Analicemos ahora las derivadas parciales primeras de la función. La derivada parcial de* $f$ *respecto de* $y$ *es cero en todo* $\mathbb{R}^2$*, ya que la función no depende de* $y$*. Por otro lado, sabemos que la función de una variable* $F(x) = |x|$ *no tiene derivada en* $x = 0$*. Por lo tanto NO EXISTE la derivada parcial de* $f$ *respecto de la variable* $x$ *en los puntos de la forma* $(0,b)$*, con* $b \in \mathbb{R}$*.*

*Precisamente éstos son los (infinitos) puntos críticos de $f$ [$(0,b)$ es un punto crítico de $f$ porque $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b)$ no existe]. Conociendo el comportamiento de la función de una variable valor absoluto, podemos deducir que los puntos críticos corresponden, en este caso, a mínimos globales de $f$. El valor mínimo de $f$ es 0. Es fácil ver que la función no posee máximo.*

**EJEMPLO 3:** Estudiar los valores extremos de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

*El dominio de la función es $\mathbb{R}^2$ y su imagen es $[0,+\infty)$. A semejanza del ejemplo anterior, la traza con el plano vertical $y=0$, es la curva quebrada $z=|x|$ en el plano $xz$. Pero en este caso, también la traza con el plano vertical $x=0$ es una curva quebrada ($z=|y|$, en el plano $zy$). Por lo tanto, NO EXISTE la derivada parcial de $f$ respecto de $x$ ni tampoco respecto de $y$, en $(0,0)$. Precisamente, éste es el único punto crítico de $f$. Reconocemos a la superficie $S : z = \sqrt{x^2+y^2}$ como la mitad superior de la superficie de un cono de eje $z$, con vértice en el origen. Deducimos, en este caso, que el único punto crítico de $f$ es un mínimo absoluto, donde la función vale 0; y no presenta máximo.*

Analicemos otra situación novedosa que encontramos para funciones de dos variables. Comencemos por el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 4:** Estudiar gráficamente la función $f(x,y) = x^2 - y^2$, analizando si tiene o no extremos relativos.

*El dominio de $f$ es $\mathbb{R}^2$. Para estudiar el comportamiento de la función trazaremos primero algunas curvas de nivel de $f$. Es fácil ver que la imagen de la función es todo $\mathbb{R}$, por lo que podemos considerar curvas de nivel para cualquier valor real de $k$. Consideraremos, a modo de ejemplo, $k = 0, \pm 1, \pm 4$. La curva de nivel de valor $k$ es el conjunto de puntos del plano $xy$ que satisface $C_k : x^2 - y^2 = k$. Así, para $k=0$ tenemos $y = \pm x$, o sea que la curva de nivel $0$ consiste de dos rectas que pasan por el origen y tienen pendiente $+1$ y $-1$ respectivamente. Para $k=1$ la curva de nivel es una hipérbola que cruza al eje $x$ en los puntos $(\pm 1, 0)$. De manera análoga, para $k=4$ la curva de nivel es una hipérbola que cruza al eje $x$ en los puntos $(\pm 2, 0)$. Para $k=-1$, obtenemos la curva $x^2 - y^2 = -1$, esto es, una hipérbola que cruza al eje $y$ en los puntos $(0, \pm 1)$. Para $k = -4$ se obtiene la hipérbola que cruza al eje $y$ en los puntos $(0, \pm 2)$. Se muestran estas curvas en la Figura 2(a)*

*Cómo no es fácil visualizar la gráfica de $f$ a partir sólo de estas 5 curvas de nivel, podríamos tomar varios valores más de $k$, pero adoptaremos otro camino. Plantearemos la gráfica de la función, dada por la superficie $S : z = x^2 - y^2$ (¡otra cuádrica conocida! ¿cuál era?) y miraremos algunas trazas verticales. La traza con $y=0$ es una parábola que abre hacia arriba en el plano $xz$, mientras que la traza con $x=0$ es una parábola que abre hacia abajo en el plano $yz$. Ahora estamos en condiciones de visualizar la gráfica elevando las curvas de nivel a la altura apropiada y teniendo en cuenta las secciones parabólicas de las trazas verticales. Este procedimiento genera la llamada* silla de montar *(técnicamente, el paraboloide hiperbólico de la Guía 1) que se muestra en la Figura 2(b). Al observar el gráfico notamos que la superficie $S : z = x^2 - y^2$ tiene cerca del origen un comportamiento especial.*

*Nos preguntamos, ¿cuál es el valor de las derivadas parciales en $(0,0)$? Tenemos que $f_x(x,y) = 2x$ y $f_y(x,y) = 2y$. Por lo tanto, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. O sea que $(0,0)$ es un punto crítico o punto estacionario de $f$. Más aún $(0,0)$ es el único punto crítico de $f$, y $f(0,0) = 0$.*
*Examinando los valores que toma la función cerca de $(0,0)$, vemos que para puntos de la forma $(a,0)$*

*se tiene $f(a,0) = a^2 > 0 = f(0,0)$ si $a \neq 0$, y para puntos de la forma $(0,b)$ se tiene $f(0,b) = -b^2 < 0 = f(0,0)$ si $b \neq 0$. Estas desigualdades son válidas aún para valores de $x$ e $y$ muy pequeños, por lo tanto $(0,0)$ no puede ser un mínimo relativo ni un máximo relativo (de hecho, es lo que se denomina un "punto silla"). O sea que $f(x,y) = x^2 - y^2$ no tiene extremos relativos (ni absolutos, por ende).*

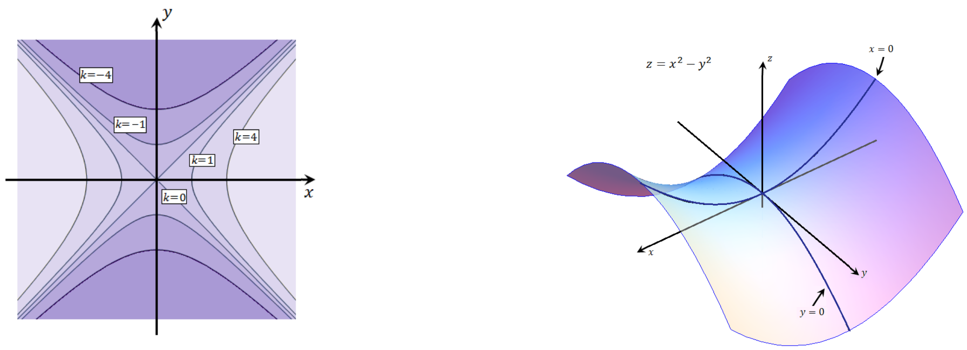


Figura 2: $f(x,y) = x^2 - y^2$. (a) Curvas de nivel. (b) La función tiene un punto silla en $(0,0)$; no tiene extremos locales.

Pensemos nuevamente en la función de una variable $F(x) = x^3$, para la cual $x = 0$ es su único punto crítico. Sin embargo, $F$ no tiene ni máximo ni mínimo local en $\mathbb{R}$. O sea que $x = 0$ es un punto que anula la derivada de $F$ pero no es un extremo relativo de $F$. En una variable, un punto con estas características se llama punto de inflexión.

Como vimos en los ejemplos, la situación es más rica para funciones de varias variables, donde se define el llamado *punto silla* o *punto de ensilladura*:

**DEFINICIÓN:**
Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se dice que $f$ tiene un *punto silla* o *punto de ensilladura* en $(x_s, y_s)$ si $f_x(x_s, y_s) = f_y(x_s, y_s) = 0$ [esto es, $(x_s, y_s)$ es un punto crítico de $f$ tal que ambas derivadas parciales primeras son nulas] pero $(x_s, y_s)$ no es un extremo local de $f$, o sea que para cada disco centrado en $(x_s, y_s)$ existen en $\mathcal{D}$ puntos donde $f(x,y) > f(x_s, y_s)$ y puntos donde $f(x,y) < f(x_s, y_s)$.

Hasta ahora hemos analizado extremos relativos pertenecientes a dominios abiertos para una función de dos variables. Pero en ocasiones es necesario determinar los valores extremos de una función cuyo dominio está restringido a cierto subconjunto especial de $\mathbb{R}^2$, por ejemplo, un cuadrante (región semiabierta), un círculo, una región triangular o cuadrada cerrada, una curva, etc.
En Análisis I se vio que para una función de una variable definida sobre un intervalo cerrado $[a,b]$, los extremos absolutos podían ocurrir o bien dentro el intervalo abierto $(a,b)$, como puntos críticos de la función, o en los bordes del intervalo, $a$ ó $b$. Además, sabemos que si una función de una variable es continua en un intervalo cerrado, alcanza su valor máximo y su valor mínimo absolutos en dicho intervalo. Para determinar estos valores debemos entonces evaluar la función no sólo en los puntos críticos, que caen en el interior del intervalo, sino también en los puntos inicial y final del intervalo.

Una situación similar ocurre para funciones de dos variables. Veamos primero algunas definiciones:

- Así como un intervalo cerrado $[a,b]$ es aquel que contiene a sus puntos del borde ($a$ y $b$), un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ se dice *cerrado* si contiene a su frontera. La *frontera* de $\mathcal{D}$, que suele anotarse como $\partial\mathcal{D}$, es el conjunto de puntos $(x_0, y_0)$ tales que todo disco centrado en $(x_0, y_0)$ contiene puntos que están en $\mathcal{D}$ y puntos que no están en $\mathcal{D}$. Por ejemplo, el disco $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ está formado por todos los puntos del círculo de radio 1 centrado en el origen, los interiores ($x^2+y^2 < 1$) más los que están en la circunferencia ($x^2+y^2 = 1$); entonces $\mathcal{D}$ es un conjunto cerrado porque contiene a su frontera (que es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$).

- Por otro lado, un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ se dice *acotado* si está contenido en algún disco.

Enunciamos el siguiente teorema en términos de conjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^2$, válido para funciones continuas de dos variables:

**TEOREMA:**
Sea $\mathcal{D}$ un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^2$ y sea $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ una función de dos variables, continua en $\mathcal{D}$. Entonces $f$ alcanza valores máximo absoluto y mínimo absoluto en algún punto de $\mathcal{D}$.

Dicho de otra forma, si $f$ es una función continua en un recinto cerrado y acotado $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, existen puntos para los cuales $f$ alcanza su mayor valor y su menor valor. Además, dichos puntos están en el interior de $\mathcal{D}$ (son algunos de los puntos críticos) y/o en la frontera $\partial\mathcal{D}$.

Se puede organizar la búsqueda de los extremos absolutos de una función continua $f(x, y)$ en una región $\mathcal{D}$ cerrada y acotada del plano, de la siguiente forma:

**Método para determinar los extremos absolutos de una función continua de dos variables $f(x, y)$ en un recinto cerrado y acotado $\mathcal{D}$**

1. Hallar todos los puntos críticos de $f(x, y)$ en el <u>interior</u> de $\mathcal{D}$, e identificar entre éstos los que son extremos relativos de $f$ (si posee).

2. Hallar los puntos de la <u>frontera</u> de $\mathcal{D}$ donde $f(x, y)$ tiene extremos locales.

3. Los únicos candidatos a extremos de la función son los puntos hallados en los pasos 1 y 2. Evaluar $f(x, y)$ en los puntos hallados; comparar los valores de la función en dichos puntos, y seleccionar el mayor y el menor de todos ellos.

**EJEMPLO 5:** Encontrar los extremos absolutos de $f(x, y) = x^2+2y^2$ en el círculo de radio 1 centrado en el origen ($x^2 + y^2 \leq 1$).

*Pensemos gráficamente la situación planteada: la gráfica de la función, $S : z = f(x, y)$, es la superficie de un paraboloide elíptico que se abre hacia arriba desde el vértice $V(0, 0, 0)$, y queremos encontrar los extremos de $f(x, y)$ cuando las variables independientes están dentro del círculo de radio 1. Por lo tanto, debemos estudiar la función $f$ con dominio restringido al conjunto $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Podemos imaginar que cortamos la superficie $S$ del paraboloide con un cilindro circular recto de eje $z$ y radio 1 ($x^2 + y^2 = 1$) y miramos (i) la parte de la superficie gráfica $S$ que corresponde al interior de $\mathcal{D}$ ($x^2 + y^2 < 1$), más (ii) la curva que se obtiene como intersección del paraboloide $S$ y el cilindro, que corresponde a la frontera de $\mathcal{D}$ ($x^2 + y^2 = 1$), como se muestra en la Figura 3.*
*Al observar esta figura notamos que (i) $f$ tiene un valor mínimo en $(0, 0)$ siendo $f(0, 0) = 0$, y (ii) la curva sobre la frontera de $\mathcal{D}$ tiene el "punto más alto" para $(0, \pm1)$ y "el punto más bajo" para $(\pm1, 0)$.*

*Efectivamente, como los puntos de esta curva satisfacen simultáneamente:* $x^2 + y^2 = 1$ *y* $z = 1 + y^2$, *vemos que* $z$ *toma los valores máximo y mínimo sobre la circunferencia, para* $y = \pm 1$ *con* $x = 0$, *y para* $y = 0$ *con* $x = \pm 1$, *respectivamente. En dichos puntos se tiene* $f(0, \pm 1) = 2$ *y* $f(\pm 1, 0) = 1$.
*Por lo tanto,* $f$ *tiene un mínimo relativo (y absoluto) en* $(0, 0)$ *y dos máximos absolutos, uno en* $(0, -1)$ *y otro en* $(0, +1)$.
*Alternativamente, los extremos de* $f$ *sobre la circunferencia podrían determinarse mediante una parametrización de la misma, por ejemplo* $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, *con* $0 \leq t \leq 2\pi$. *Ahora consideramos* $F(t) = f(\vec{r}(t)) = f(\cos t, \operatorname{sen} t) = (\cos t)^2 + 2(\operatorname{sen} t)^2 = 1 + \operatorname{sen}^2 t$, *y buscamos los extremos de* $F(t)$, *como función continua de una variable en el intervalo cerrado* $[0, 2\pi]$. *Como* $F'(t) = 2 \operatorname{sen}(t) \cos(t)$, *se tiene* $F'(t) = 0$ *para* $t = 0$, $\frac{\pi}{2}$, $\pi$, *y* $\frac{3\pi}{2}$. *Los puntos de la circunferencia correspondientes a esos valores de* $t$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ *y* $(0, -1)$ *respectivamente, son máximos o mínimos de* $f$ *sobre la frontera de* $\mathcal{D}$.

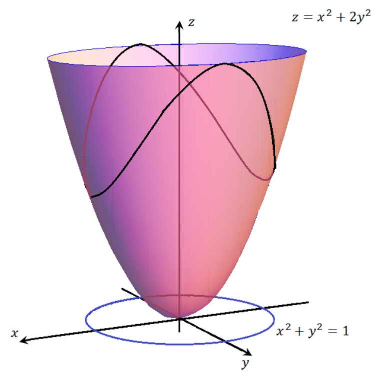


Figura 3: La función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ para $(x, y)$ en el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ tiene un mínimo absoluto en $(0, 0)$, y máximos absolutos en $(0, -1)$ y $(0, 1)$.

## EJERCICIOS:

1. Halle todos los puntos estacionarios de las siguientes funciones, si poseen:
   *a*) $f(x, y) = \ln(2 + \operatorname{sen}(xy))$
   *b*) $g(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + 10$
   *c*) $h(x, y) = x^5 y + xy^5 + xy$

2. Halle todos los puntos estacionarios de las siguientes funciones, si poseen, y decida por inspección si cada uno de ellos es un máximo local, un mínimo local o un punto silla:
   *a*) $f(x, y) = e^{-x^2 - 7y^2 + 3}$
   *b*) $f(x, y) = e^{x^2 + 2y^2}$

3. Revea el Ejemplo 6 de la Guía 3 y responda para cada una de las funciones, observando las curvas de nivel de la Figura 5: ¿posee extremos locales? En caso afirmativo, ¿cuáles son?, ¿cuál es el valor de la función allí?

4. Encontrar los extremos absolutos de $f(x, y) = x + y$ en el círculo de radio 1 centrado en el origen $(x^2 + y^2 \leq 1)$.

## 2.2. Clasificación de puntos estacionarios para funciones de dos variables

*Hemos visto, para funciones de dos variables, cómo hallar sus puntos críticos o estacionarios, y en algunos casos hemos podido clasificarlos como extremo (máximo o mínimo) o punto silla, mediante inspección de la función o por métodos gráficos. Veremos ahora un criterio analítico de clasificación, que hace uso de las derivadas parciales segundas de la función, evaluadas en el punto estacionario (válido para funciones de clase $\mathcal{C}^2$).*

Repasemos la manera de clasificar puntos críticos para una función $F(x)$ de una variable: se determinan primero todos los valores de $x$ para los que $F'(x)$ se anula o no existe; estos valores de la variable son los únicos candidatos a dar extremos de la función. En el caso de los puntos críticos para los cuales la derivada primera existe y es nula [esto es, cuando la función es derivable en $x = x_c$ con $F'(x_c) = 0$], una técnica que se puede utilizar es el criterio de la derivada primera que consiste en analizar, en el entorno de cada valor crítico (esto es, para $x$ cercanos a $x_c$), el signo de $F'$ y por lo tanto el crecimiento o decrecimiento de $F$, que indicará si el punto crítico corresponde a un extremo (máximo o mínimo) local, o a un punto de inflexión de $F$.
Una alternativa es utilizar el criterio de la derivada segunda que consiste en analizar, en el punto crítico mismo (esto es, para $x = x_c$), el signo de $F''$:

- Si $F''(x_c) > 0$, entonces $x_c$ es un mínimo local de $F$.
  Ejemplo: $F(x) = x^2$ tiene un mínimo en $x_c = 0$.
- Si $F''(x_c) < 0$, entonces $x_c$ es un máximo local de $F$.
  Ejemplo: $F(x) = \operatorname{sen} x$ tiene un máximo en $x_c = \frac{\pi}{2}$.
- Si $F''(x_c) = 0$, este criterio no decide.
  Ejemplo: $F(x) = x^3$ y $G(x) = x^4$ tienen un punto crítico en $x_c = 0$, con derivada primera y segunda nulas en dicho punto; pero en un caso es un punto de inflexión, en el otro un extremo.

Para justificar este criterio, podemos apelar a la aproximación de la función $F(x)$ alrededor de $x_c$ mediante polinomios de Taylor. Suponiendo que $F(x)$ es dos veces derivable en $x_c$, a segundo orden se tiene:

$$F(x) \approx P_2(x) = F(x_c) + 0 + \frac{1}{2}F''(x_c)\,(x - x_c)^2 \qquad \text{para} \quad x \text{ proximo a } x_c$$

pues el término lineal $F'(x_c)\,(x - x_c)$ se anula. Si lo visualizamos gráficamente la expresión de la derecha corresponde, en el caso en que el coeficiente del término cuadrático sea distinto de 0, a una parábola con ramas hacia arriba o hacia abajo dependiendo del signo de ese coeficiente. Dado que sabemos que el polinomio es una buena aproximación de la función en el entorno del punto donde está centrado, podemos confiar en que la gráfica de la función será localmente muy parecida a una parábola e inmediatamente identificamos de qué tipo de extremo se trata, conociendo el signo de $F''$ en $x_c$. ¿Qué se puede decir en el caso en que el coeficiente del término cuadrático es igual a 0? A este orden de aproximación, no mucho..., salvo que localmente la gráfica de la función es "muy chata", lo que no permite decidir si se trata de un extremo o un punto de inflexión; habría que "ir más allá" de la derivada segunda, o inspeccionar con otro método la función para clasificar ese punto crítico.

Una idea similar a ésta permite, para una función $f(x, y)$ de dos variables, clasificar los puntos estacionarios para los cuales ambas derivadas parciales existen y son nulas [esto es, la función es diferenciable en $(x, y) =$

$(x_c, y_c)$ con $f_x(x_c, y_c) = 0$ y $f_y(x_c, y_c) = 0$]. El criterio involucra las cuatro derivadas parciales segundas de $f(x, y)$, combinadas formando el llamado *Hessiano* de $f$:

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2$$

donde en el último paso se usó el Teorema de Clairaut.

**Criterio de las derivadas parciales segundas para la clasificación de puntos estacionarios de funciones de dos variables**

Sea $f(x, y) : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ (esto es, con derivadas parciales segundas continuas) en un disco centrado en $(x_c, y_c)$, siendo $(x_c, y_c)$ un punto crítico de $f$ dentro de $\mathcal{D}$ tal que $\vec{\nabla} f(x_c, y_c) = \vec{0}$.
Sea $D_{(x_c,y_c)} = Hf(x_c, y_c)$ el valor del Hessiano de $f$ en el punto crítico.

- Si $D_{(x_c,y_c)} > 0$, entonces $(x_c, y_c)$ es un extremo local de $f$, el cual es
  - un mínimo local si además $f_{xx}(x_c, y_c) > 0$
  - un máximo local si además $f_{xx}(x_c, y_c) < 0$
- Si $D_{(x_c,y_c)} < 0$, entonces $(x_c, y_c)$ es un punto silla de $f$
- Si $D_{(x_c,y_c)} = 0$, este criterio no decide.

Para los ejemplos vistos en la sección anterior, evaluar el Hessiano de la función en cada punto estacionario que corresponda a gradiente nulo, y verificar el criterio.

**EJEMPLO 6:** Hallar y clasificar todos los puntos estacionarios, si posee, de la función $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

*Por tratarse de una función polinomial, su dominio es todo $\mathbb{R}^2$; además es diferenciable (y de clase $\mathcal{C}^\infty$) en todo el plano. El vector gradiente es $\vec{\nabla} f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$, que se anula cuando*

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0 \end{cases}$$

*De la primera ecuación se tiene $x^2 - y = 0$, o sea $y = x^2$. Reemplazando $y$ en la segunda ecuación, $y^2 - x = 0$, queda*

$$x^4 - x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(x^3 - 1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0 \ \lor \ x = 1$$

*Cuando $x = 0$ resulta $y = 0^2 = 0$, luego $(0, 0)$ es un punto estacionario; mientras que cuando $x = 1$ resulta $y = 1^2 = 1$, luego $(1, 1)$ es un punto estacionario. Luego la función tiene dos puntos estacionarios: $(0, 0)$ y $(1, 1)$, únicamente.*

*El siguiente paso es hallar el Hessiano de $f$ y evaluarlo en cada punto estacionario, por separado, para clasificarlo. Se tiene*

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 6x\ 6y - (-3)^2 = 36\,xy - 9$$

*Luego $D_{(0,0)} = Hf(0,0) = 0-9 = -9 < 0$, por lo que $f$ tiene en $(0,0)$ un punto silla, de valor $f(0,0) = 0$. Mientras que $D_{(1,1)} = Hf(1,1) = 36-9 = 27 > 0$, por lo que $f$ tiene en $(1,1)$ un extremo relativo, de valor $f(1,1) = -1$; de acuerdo al criterio este extremo es de hecho un mínimo local, pues $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$ (notar que también $f_{yy}(1,1) > 0$); y podemos agregar que no se trata de un mínimo absoluto pues para puntos $(x,y)$ sobre la recta $y = x$ muy alejados del origen en el tercer cuadrante, la función toma los valores $f(x,x) = 2x^3 - 3x^2 \to -\infty$.*

**EJEMPLO 7:** ¿Posee extremos relativos la función $g(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$? ¿De qué tipo? ¿Dónde? ¿Cuál es o cuáles son los valores extremos de $g$?

*La función $g$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en todo $\mathbb{R}^2$, por ser polinomial. Esto significa que sus puntos estacionarios se obtienen solamente a partir de la anulación de ambas derivadas parciales primeras (simultáneamente), y no porque una de ellas no exista. Sospechamos que la función tiene un mínimo (al menos local), basados en que la función es continua y que para los puntos del plano con $y = x$, $g(x,x)$ resulta una función cuártica de $x$, con ramas hacia arriba cuando $x$ es muy grande tanto positivo como negativo. Busquemos los puntos estacionarios y clasifiquémoslos. Las derivadas parciales primeras de $g$ dan: $g_x(x,y) = 4x^3 - 4(x-y)$ y $g_y(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Luego debemos resolver el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} x^3 - (x-y) &= 0 \\ y^3 + (x-y) &= 0 \end{cases}$$

*Sumando ambas ecuaciones se tiene $x^3 + y^3 = 0$, de donde $y^3 = -x^3$, y finalmente $y = -x$. Reemplazando en la primera ecuación da $x^3 - 2x = 0$, o sea $x(x^2-2) = 0$ cuyas soluciones son: $x = 0$ (en cuyo caso $y = 0$) ó $x = \pm\sqrt{2}$ (en cuyo caso $y = \mp\sqrt{2}$, respectivamente). Luego la función tiene tres puntos estacionarios: $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, y $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.*
*El siguiente paso es hallar el Hessiano de $g$ y evaluarlo en cada punto estacionario, por separado, para clasificarlo. Se tiene*

$$Hg(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ \\ 4 & 12y^2-4 \end{vmatrix} = 48(3x^2y^2 - x^2 - y^2)$$

*Luego $D_{(\sqrt{2},-\sqrt{2})} > 0$, por lo que $g$ tiene en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ un extremo relativo, más aún, se trata de un mínimo local pues $g_{xx}(\sqrt{2},-\sqrt{2}) > 0$; probar que lo mismo ocurre para el punto crítico $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. Mientras que $D_{(0,0)} = 0$, entonces el criterio no nos dice si $g$ tiene un extremo o un punto silla en $(0,0)$. En este caso podemos (debemos) inspeccionar la función para saber cómo se comporta cerca del origen: por ejemplo para puntos sobre la recta $y = x$ se tiene $g(x,x) = 2x^4 > 0 = g(0,0)$, pero para puntos sobre el eje $y$ se tiene $g(0,y) = y^4 - 2y^2 < 0 = g(0,0)$ cuando $y$ es pequeño. Este análisis nos permite deducir que el punto estacionario $(0,0)$ es un punto silla.*
*Las respuestas al enunciado del ejercicio son entonces: si, $g$ posee dos extremos relativos, ambos mínimos, en los puntos $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ para los que $g = -8$.*

**Opcional:** A continuación damos los lineamientos de la demostración del criterio de las derivadas parciales segundas. La justificación se basa, al igual que para funciones de una variable, en el desarrollo de Taylor de la función. La aproximación cuadrática de una función de dos variables agrega términos de orden 2 a la aproximación lineal (o linealización) de la función que vimos en la Guía 3; se puede probar que esos términos tienen como coeficientes las derivadas parciales segundas de $f$ evaluadas en el centro del desarrollo.
Suponiendo que $f$ es de clase $\mathcal{C}^2$ en $(x_0, y_0)$, a segundo orden se tiene:

$$f(x,y) \approx P_2(x,y) = f(x_0,y_0) + [f_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\,(y-y_0)] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)\,(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)\,(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)\,(y-y_0)^2\right]$$

para $(x,y)$ próximo a $(x_0,y_0)$.
Ahora consideremos el polinomio alrededor de un punto crítico, entonces los términos lineales se anulan. Supongamos además (por simplicidad) que el punto crítico es el $(0,0)$ y que la función allí vale $f(0,0)=0$, luego se tiene

$$f(x,y) \approx P_2(x,y) = 0 + [0+0] + \frac{1}{2}\left[Ax^2 + 2Bxy + Cy^2\right]$$

donde llamamos $A = f_{xx}(0,0)$, $B = f_{xy}(0,0)$, $C = f_{yy}(0,0)$ a los coeficientes del polinomio de segundo orden. Supongamos que $A \neq 0$, entonces el lado derecho se puede reescribir como

$$P_2(x,y) = \frac{A}{2}\left[\left(x^2 + 2\frac{B}{A}xy\right) + \frac{C}{A}y^2\right] = \frac{A}{2}\left[\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 - \left(\frac{B}{A}y\right)^2 + \frac{C}{A}y^2\right] = \frac{A}{2}\left[\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 + \left(\frac{AC-B^2}{A^2}\right)y^2\right]$$

donde completamos cuadrados. Ahora bien, dado que sabemos que $P_2$ es una buena aproximación a $f$ cerca del centro del desarrollo, en este caso el punto crítico $(0,0)$, las gráficas de $P_2(x,y)$ y de $f(x,y)$ estarán bastante "pegadas" para puntos cercanos a $(0,0)$. Y entonces la pregunta es: ¿qué forma tiene la superficie gráfica del polinomio $P_2(x,y)$, o sea, $S^{(2)} : z = P_2(x,y)$? Tomando la última expresión, resulta

$$\frac{z}{A/2} = \left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 + \left(\frac{AC-B^2}{A^2}\right)y^2$$

que tiene la forma de una superficie cuádrica. Corresponde a un *paraboloide elíptico* cuando $AC - B^2 > 0$ (los dos términos del lado derecho tienen igual signo), o a un *paraboloide hiperbólico* cuando $AC - B^2 < 0$. En el primer caso podemos agregar todavía que si $A > 0$ el paraboloide abre hacia arriba, mientras que si $A < 0$ abre hacia abajo. Notando que $AC - B^2$ no es más que el Hessiano de $f$ en el punto crítico, se completa la justificación del criterio.

## EJERCICIOS:

1. Hallar los valores máximo y mínimo locales y los puntos silla de las siguientes funciones:

   *a*) $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$
   *b*) $f(x,y) = xy - 2x - y$
   *c*) $f(x,y) = e^{4y-x^2-y^2}$
   *d*) $g(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
   *e*) $h(x,y) = x \operatorname{sen} y$
   *f*) $f(x,y) = \frac{x^2y^2-8x+y}{xy}$

## 3. Extremos condicionados o restringidos

*En la sección anterior hemos visto cómo obtener extremos de funciones de dos variables en regiones abiertas* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$*, explorando "libremente" sobre todos los pares* $(x,y) \in \mathcal{D}$ *para ver cuáles son puntos críticos y luego clasificarlos. Analizaremos ahora una situación diferente: cuando los pares* $(x,y)$ *sobre los cuales queremos conocer los extremos de* $f$*, están "condicionados" o "restringidos" por algún "vínculo" o "ligadura" que relaciona las variables* $x$ *e* $y$*. Ejemplos típicos de esta situación son: hallar las dimensiones de un rectángulo de área máxima con perímetro dado (digamos 120 cm), o determinar dos números cuya diferencia sea fija (digamos 100) y su producto sea mínimo. En el primer caso las variables son los lados* $b$ *y* $h$ *del rectángulo, la función a maximizar es* $A(b,h) = bh$ *y el vínculo entre las variables es que* $2b + 2h = 120$*. En el segundo caso se pide minimizar la función* $P(x,y) = xy$ *donde* $x$ *e* $y$ *son dos variables reales sujetas a la condición de que* $|x - y| = 100$*.*
*Este tipo de situaciones han sido tratadas en Análisis Matemático I, apelando a una sustitución: a partir del vínculo entre las variables, despejar una de ellas en términos de la otra y reemplazar en la expresión de la función, que entonces pasa a depender de una sola variable. Por ejemplo: para hallar el área máxima de un rectángulo de perímetro 120 cm, lo que se hacía era despejar* $h = h(b) = 60 - b$ *y optimizar* $\mathcal{A}(b) = A(b, h(b)) = b(60 - b)$*, en el intervalo* $b \in [0, 60]$ *(¿por qué?).*
*Sin embargo, el procedimiento anterior requiere que se cumplan algunas hipótesis (como que se pueda despejar explícitamente una variable en términos de la otra), lo que no siempre es posible tal como se muestra en el siguiente caso:*

> ¿Cuáles son (si existen) los puntos sobre la curva $C : y^2 = x - 1$ que están más cerca y más lejos del origen de coordenadas en el plano $xy$? ¿A qué distancia están?
>
> *Se pide encontrar el mínimo y el máximo de* $d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *cuando* $y^2 = x - 1$*. Podemos trabajar con la función* $f(x,y) = [d(O,P)]^2 = x^2 + y^2$ *(que, por ser polinomial, es más sencilla de manipular que su raíz cuadrada), dado que un extremo de* $f$ *corresponde al mismo tipo de extremo para* $d$ [1]*. La condición que deben satisfacer las coordenadas de los puntos que buscamos es que* $y^2 = x - 1$*, luego si reemplazamos* $y^2$ *por* $x - 1$ *en* $f(x,y)$*, habría que optimizar la expresión* $F(x) = x^2 + x - 1$*.*
> *Analicemos la función* $F(x)$*: tiene un (solo) punto crítico pues* $F'(x) = 2x + 1$ *se anula para* $x = -\frac{1}{2}$*; como* $F''(-\frac{1}{2}) = 2 > 0$*, se trata de un mínimo de* $F(x)$*. Dicho mínimo tiene el valor* $F(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}$*, lo que resulta al menos "curioso" ya que habíamos partido de una función que era una distancia al cuadrado, o sea, positiva...!!*
> *Basta que grafique la parábola* $x = y^2 + 1$ *para descubrir que el punto más cercano al origen es el* $(1,0)$*, mientras que siempre se pueden encontrar puntos arbitrariamente alejados del origen. Dicho en otras palabras,* $d(O,P)$ *es mínima y vale 1 para* $P(1,0)$*, mientras que* $d(O,P)$ *no tiene valor máximo.*

¿Qué es lo que falló en este caso? Entre otras cosas, no tuvimos en cuenta que $y^2 = x - 1$ tiene sentido sólo para $x \geq 1$. Veremos una técnica adecuada para resolver problemas de optimización "con vínculos" (o con condiciones, ligaduras, o restricciones), conocida como *método de los multiplicadores de Lagrange.*

[1] Justificación (para funciones de una variable): Sea $F(x)$ una función estrictamente positiva, con $F'(x_c) = 0$ y $F''(x_c) > 0$; entonces $F$ presenta un mínimo en $x_c$. Si se define $D(x) = \sqrt{F(x)}$, se tiene $D'(x) = F'(x)/[2\sqrt{F(x)}]$ y $D''(x) = [2F''(x)F(x) - (F'(x))^2]/[4\sqrt[3]{F(x)}]$; entonces se ve que $x_c$ también es un punto crítico de $D$ y que de hecho corresponde a un mínimo de $D$.

## 3.1. Método de los multiplicadores de Lagrange para una función de 2 variables con 1 vínculo

Volvamos al Ejemplo 5 de la Sección 2.1, donde se resolvió gráfica e intuitivamente la búsqueda de los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ en el círculo de radio 1 centrado en el origen. De acuerdo al teorema de extremos absolutos para funciones continuas en recintos cerrados y acotados, y siguiendo el método indicado a continuación del teorema, la discusión se dividió en tres items:

(1) hallar y clasificar los puntos críticos de $f$ en el *interior* del círculo,

(2) hallar extremos locales de $f$ sobre la circunferencia *borde*, y

(3) finalmente comparar los valores de $f$ en todos los candidatos a extremo.

Hemos realizado un tratamiento gráfico completo del problema, y en la sección anterior dimos el criterio para resolver analíticamente el item (1); veamos ahora un método analítico para tratar el item (2).

La Figura 3 corresponde a la gráfica de la función $f$ en el espacio y fue útil para discutir cuáles son los puntos más bajos y más altos de la gráfica que están justo por encima de la circunferencia $C : x^2 + y^2 = 1$.

La Figura 4 corresponde a un mapa de contornos de la misma función $f$ en el plano. Contiene varias curvas de nivel (elipses) para $f$, y se indica en el mismo gráfico la curva "condicionante" (la circunferencia). Es claro que hay una curva de nivel que pasa por puntos de la circunferencia y que tiene el valor más chico de $k = k_{\min} = 1$ (las curvas de nivel con $k$ menores no cortan a la circunferencia, entonces no se satisface el vínculo); también es evidente que existe una curva de nivel que pasa por puntos de la circunferencia y que tiene el valor más grande de $k = k_{\max} = 2$ (las curvas de nivel con $k$ mayores no intersecan a la circunferencia, entonces no se satisface la restricción).

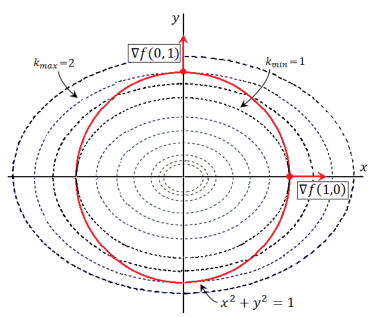


Figura 4: La función $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ para $(x,y)$ en la circunferencia $C : x^2 + y^2 = 1$, tiene mínimos de valor 1 en $(\pm 1, 0)$, y máximos de valor 2 en $(0, \pm 1)$. A modo de ejemplo, se muestra $\vec{\nabla} f$ en el punto $M_+(0,1)$, que resulta perpendicular en dicho punto tanto a la curva de nivel $C_2$ de $f$ como a la circunferencia $C$.

Observe con atención los puntos de intersección de la curva de nivel $C_1$ con la curva vinculante $C$, y de la curva de nivel $C_2$ con la curva vinculante $C$. Para fijar ideas tomemos por ahora $C_2$ y $C$: en los puntos de intersección, que vemos que son $M_\pm(0, \pm 1)$, estas curvas se tocan en forma tangente, lo que significa que si tomamos en esos puntos un vector tangente a cada curva, éstos serán colineales entre sí; o, dicho de otro modo, en los puntos $M_\pm$ vectores perpendiculares a una y otra curva serán colineales entre sí.

Sabemos cómo hallar un vector perpendicular a la curva de nivel $C_2$ en un punto: a través del gradiente de la función $f$, evaluado en el punto. Así tenemos $\vec{\nabla} f(0, \pm 1) = (0, \pm 4)$.

Si la curva $C$ fuera una curva de nivel, podríamos hacer lo mismo. Definamos entonces una *función auxiliar*, dada por $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, de tal forma que la curva de nivel 0 de $g$ reproduce la curva vinculante $C$ (como función auxiliar sirve también la expresión $x^2 + y^2$, pero entonces el vínculo correspondería a la curva de nivel 1 de ésta). Así tenemos $\vec{\nabla} g(0, \pm 1) = (0, \pm 2)$. Efectivamente, los vectores dados son colineales; dicho de otra forma, uno es un *múltiplo* del otro, en un factor $\lambda = 2$.

Una situación análoga se presenta en los puntos de intersección entre $C_1$ y $C$: $\vec{\nabla} f(\pm 1, 0) = (\pm 2, 0)$ y $\vec{\nabla} g(\pm 1, 0) = (\pm 2, 0)$ son colineales (de hecho, se trata del mismo vector; en este caso el factor de proporcionalidad o multiplicador es $\lambda = 1$).

<u>NOTA 1</u>: Se puede ver que otras curvas de nivel entre $C_1$ y $C_2$ (esto es, para valores de $k$ intermedios entre 1 y 2) cortan también a la curva vinculante $C$ pero <u>NO</u> de manera tangente. Esto es un indicio de que ese $k$ es intermedio, y no el menor o mayor posible compatible con el vínculo. ¿Está de acuerdo?

<u>NOTA 2</u>: Cuando hablamos de colinealidad entre los vectores gradiente, se debe tener cuidado de que ninguno de ellos sea el vector nulo. Habrá que chequearlo en cada ejercicio. Para el ejemplo tratado aquí, $\vec{\nabla} g(x, y) = (2x, 2y)$ se anula solamente en el punto $(0, 0)$, pero como éste no satisface el vínculo (la curva condicionante $C$ no pasa por el origen), se puede proceder sin problema.

> **EJERCICIO:** Intente reproducir el mismo razonamiento (analizando curvas de nivel) para el problema del área máxima con perímetro dado. Considere $f(x, y) = xy$ con el vínculo $g(x, y) = x + y - 60 = 0$. Tenga en cuenta que sólo debe trabajar en el primer cuadrante, ya que $x$ e $y$ deben ser positivos en este problema. ¿Cuánto vale el múltiplo entre los gradientes de ambas funciones en el punto candidato a máximo?

En la discusión anterior hemos establecido una justificación para el siguiente teorema, que da una *condición necesaria* (aunque no suficiente) para la existencia de un extremo restringido de una función:

**TEOREMA DE LAGRANGE (2 variables, 1 restricción)**

Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ funciones de dos variables con derivadas parciales primeras continuas, y tales que $f$ tiene un extremo en el punto $(x_L, y_L)$ que pertenece a la curva suave dada por $g(x, y) = 0$, o sea

$$g(x_L, y_L) = 0.$$

Si $\vec{\nabla} g(x_L, y_L) \neq \vec{0}$, entonces existe un número real $\lambda$ (denominado *multiplicador de Lagrange*) tal que

$$\vec{\nabla} f(x_L, y_L) = \lambda \, \vec{\nabla} g(x_L, y_L).$$

Finalmente, damos el método para calcular en forma analítica los valores extremos de una función de dos variables sujetos a una restricción:

**MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE (2 variables, 1 restricción)**
Suponiendo que $f(x, y)$ tiene un extremo sujeto a la restricción $g(x, y) = 0$, donde $f$ y $g$ cumplen los requisitos del Teorema de Lagrange, para buscar el extremo se procede de la siguiente forma:

1. resolver el sistema de $2 + 1$ ecuaciones

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda \ g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda \ g_y(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

   verificando que $\vec{\nabla} g$ es no nulo;

2. evaluar $f$ en cada una de las soluciones obtenidas y comparar. El menor valor será el mínimo condicionado y el mayor valor será el máximo condicionado de $f$ bajo la ligadura $g(x, y) = 0$.

OBSERVACIONES:
Se debe resolver un sistema (generalmente no lineal) de 3 ecuaciones con 3 indeterminadas, que puede tener una o más soluciones. Sin embargo, no todas las soluciones del sistema de ecuaciones corresponden a extremos restringidos de $f$ (la colinealidad de los gradientes es condición necesaria pero no suficiente).
Por otro lado, si la solución consiste de un único punto, se debe inspeccionar la función en puntos de su entorno (que satisfagan la ligadura) para justificar si se trata localmente de un mínimo o un máximo condicionado.

**EJERCICIO:** Aplique el método de los multiplicadores de Lagrange para extremizar la función del Ejemplo 5 de la Sección 2.1 sobre la circunferencia dada, y muestre analíticamente el resultado. ¿Coincide con lo obtenido antes por medios gráficos?

La técnica vista aquí también puede aplicarse a la optimización de una función de tres variables $f(x, y, z)$ sujeta a una restricción de la forma $g(x, y, z) = 0$. Adapte el teorema y el método a este caso, planteando el sistema de $3 + 1$ ecuaciones a resolver ahora. Piense en la justificación del teorema (colinealidad de los vectores gradiente de $f$ y $g$, que ahora resultan perpendiculares a la superficie de nivel $k$ para $f$ y a la superficie condicionante de nivel 0 para $g$ en el punto de intersección entre ambas superficies). Interprete gráficamente.

**EJEMPLO 8:** Encuentre la distancia más corta del punto $A(2, -2, 3)$ al plano $6x + 4y - 3z = 2$.

*Se busca minimizar* $d(A, P) = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2}$ *para* $P(x, y, z)$ *sobre el plano dado. Antes de hacer ningún cálculo, conviene verificar que* $A$ *mismo no pertenece al plano, porque en tal caso la respuesta sería trivial! (verifique)*

*Para facilitar el cómputo definimos la función*

$$f(x,y,z) = (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2$$

*que es el cuadrado de la distancia (un mínimo de $f$ también es un mínimo de $d$). Las coordenadas del punto $P$ deben satisfacer la ecuación del plano, dicho de otra forma están vinculadas por la ecuación $6x + 4y - 3z - 2 = 0$, por lo cual definimos la función auxiliar*

$$g(x,y,z) = 6x + 4y - 3z - 2$$

*cuyo gradiente es no nulo en todo $\mathbb{R}^3$ (verifique). Como función auxiliar sirve también $6x + 4y - 3z$, pero entonces el vínculo correspondería a la superficie de nivel 2 de ésta.*

*Tenemos entonces todos los elementos para aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange:*

$$\begin{cases} 2(x-2) = \lambda\ 6 \\ 2(y+2) = \lambda\ 4 \\ 2(z-3) = \lambda\ (-3) \\ 6x + 4y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

*De las 3 primeras ecuaciones se tiene $x = 3\lambda + 2$, $y = 2\lambda - 2$, $z = -\frac{3}{2}\lambda + 3$, respectivamente. Reemplazando en la cuarta ecuación, ésta queda solamente en función del multiplicador de Lagrange:*

$$6(3\lambda + 2) + 4(2\lambda - 2) - 3\left(-\frac{3}{2}\lambda + 3\right) - 2 = 0$$

*que tiene solución (única) $\lambda = \frac{14}{61}$. Luego el punto buscado es $P_L(\frac{164}{61}, -\frac{94}{61}, \frac{162}{61})$ (verificar que pertenece al plano), que está a una distancia $d_L = \frac{\sqrt{62941}}{61} \simeq 4{,}11$ del punto $A$. La respuesta al ejercicio no está completa aún: falta justificar que $P_L$, que es la única solución hallada, es efectivamente el punto del plano, más cercano (y no el más lejano) a $A$. Un gráfico nos convencerá de ello (o elegir otro punto cualquiera que satisfaga el vínculo, o sea que esté sobre el plano dado, y ver que su distancia a $A$ es mayor que $d_L$).*

## 3.2. Método de los multiplicadores de Lagrange para una función de 3 variables con 2 vínculos

La técnica de Lagrange se puede extender a la optimización restringida de funciones de $n$ variables con $m$ vínculos (con $m < n$, por supuesto).

Mencionaremos aquí el caso de tener que optimizar una función $f$ de tres variables $x, y, z$ las cuales no pueden variar libremente sobre todo el dominio de $f$ sino que están vinculadas por dos restricciones, que escribiremos de manera genérica como $g(x,y,z) = 0$ y $h(x,y,z) = 0$. Se puede mostrar que la condición necesaria que da el Teorema de Lagrange en este caso, es que el vector gradiente de $f$ pertenezca al plano determinado por los gradientes de $g$ y de $h$ (siendo éstos dos vectores no nulos, ni colineales entre sí). Esto se escribe como una combinación lineal, donde los coeficientes son dos multiplicadores de Lagrange.

**MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE (3 variables, 2 restricciones)**

Suponiendo que $f(x, y, z)$ tiene un extremo sujeto a las restricciones $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$, para buscar el extremo se procede de la siguiente forma:

1. resolver el sistema de $3 + 2$ ecuaciones

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = \lambda\ g_x(x,y,z) + \mu\ h_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) = \lambda\ g_y(x,y,z) + \mu\ h_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) = \lambda\ g_z(x,y,z) + \mu\ h_z(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

   verificando que $\vec{\nabla} g$ y $\vec{\nabla} h$ son no nulos y no colineales entre sí;

2. evaluar $f$ en cada una de las soluciones obtenidas y comparar. El menor valor será el mínimo condicionado y el mayor valor será el máximo condicionado de $f$ bajo las ligaduras $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z)$.

Un ejemplo típico de optimización con dos vínculos es el siguiente:

**EJERCICIO:** La función $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$ representa la temperatura en cada punto de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 50$. Hallar la temperatura máxima sobre la curva intersección de dicha superficie con el plano $x = z$.
Plantee el problema y el sistema de ecuaciones a resolver.

## 3.3. Determinación de extremos absolutos de funciones continuas en recintos cerrados y acotados

Concluimos esta guía presentando la solución completa al problema de hallar los extremos absolutos de una función continua, de dos variables, en un recinto cerrado y acotado. La existencia de extremos absolutos está garantizada por el teorema visto en la Sección 2.1.

**EJEMPLO 10:** Encontrar los valores máximos y mínimos de la función $f(x, y) = 3x+4y$ en el círculo de radio 1 centrado en el origen $(x^2 + y^2 \leq 1)$.

*De acuerdo al teorema de extremos absolutos para funciones continuas en recintos cerrados y acotados, y siguiendo el método indicado en la Sección 2.1, dividimos la resolución en tres items: (1) hallar y clasificar los puntos críticos de $f$ en el interior del círculo, (2) hallar extremos locales de $f$ sobre la circunferencia borde, y (3) comparar los valores de $f$ en todos los candidatos a extremo.*

*(1) Al ser $f$ diferenciable, sus puntos críticos son los que anulan ambas derivadas parciales (simultáneamente). Pero $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Esto significa que $f$ no tiene puntos críticos, que por supuesto era lo esperado ya que la gráfica de $f$ es un plano! En consecuencia, los extremos de $f$ caerán sobre la frontera de la región.*

*(2) Ahora aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar los extremos locales de $f$ sobre la circunferencia borde. O sea, buscamos los extremos de $f(x,y) = 3x + 4y$ sujetos a $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, donde $\vec{\nabla} g$ sólo se anula en $(0,0)$, que no pertenece a la circunferencia borde. Podemos entonces aplicar el método y comenzamos resolviendo el siguiente sistema de $2+1$ ecuaciones:*

$$\begin{cases} 3 = \lambda\ 2x \\ 4 = \lambda\ 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

*Como $\lambda \neq 0$, se tiene $x = \frac{3}{2\lambda}$, $y = \frac{2}{\lambda}$. Si reemplazamos en la última ecuación del sistema, queda*

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0$$

*Resolviendo para $\lambda$ obtenemos*

$$\lambda = \pm\frac{5}{2}$$

*Con lo cual, si $\lambda = +\frac{5}{2}$ se tiene $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{2}{\lambda} = \frac{4}{5}$; y si $\lambda = -\frac{5}{2}$ se tiene $x = -\frac{3}{5}$, $y = -\frac{4}{5}$. Por lo tanto, los puntos buscados son $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ y $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.*

*(3) Para finalizar calculamos el valor de $f(x,y)$ en todos los puntos candidatos a extremos absolutos de $f$. En este caso, como $f$ no tiene puntos críticos y por ende tampoco extremos locales en el interior del círculo, sólo debemos mirar los valores de $f$ en los posibles extremos locales sobre la circunferencia borde, es decir:*

$$f\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 3\left(\frac{3}{5}\right) + 4\left(\frac{4}{5}\right) = 5\ , \qquad f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = -5$$

*Por lo tanto, en el círculo unidad la función $f$ alcanza su valor máximo absoluto en el punto $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ donde $f$ vale 5 y su valor mínimo absoluto en el punto $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ donde $f$ vale $-5$.*
*Desarrolle el método gráfico, tanto por medio de la gráfica de $f$ en el espacio como por medio de un mapa de contornos en el plano, y compruebe el resultado analítico hallado.*

Veamos cómo proceder cuando la región está delimitada por una curva suave a trozos:

**EJEMPLO 11:** Supongamos que queremos encontrar los valores máximos y mínimos de la función $f(x,y) = 3x + 4y$ pero esta vez en cierta porción del círculo de radio 1 centrado en el origen. Consideramos $\overline{\mathcal{D}}$, el sector circular del primer cuadrante, que está comprendido entre el eje $x$ y la recta $y = \sqrt{3}\,x$, incluyendo sus bordes.

*Como ya analizamos en el ejemplo anterior, $f$ no tiene puntos críticos, por lo que no tendrá extremos locales en el interior de $\overline{\mathcal{D}}$. Buscamos ahora los extremos locales en el borde de $\overline{\mathcal{D}}$. En este caso el borde de $\overline{\mathcal{D}}$ es una curva suave a trozos, que consta de tres tramos suaves. Analicemos cada tramo por separado: (a) la porción del eje $x$ que va desde el origen al punto $(1,0)$; (b) el arco de circunferencia que va desde el punto $(1,0)$ hasta el punto en el que la recta $y = \sqrt{3}\,x$ corta en el primer cuadrante*

*a la circunferencia, que sale de resolver $x^2+y^2=1$, $y=\sqrt{3}\,x$ con $x,y>0$, esto es $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$; (c) el segmento de recta comprendido entre dicho punto y el origen. A los puntos inicial y final de cada tramo los trataremos por separado (como se hacía con los bordes de un intervalo cerrado en AMI). La función $f$ sobre el tramo (a) se reduce a $f(x,0)=3x$, con $0<x<1$, que no tiene extremos locales. Sobre el tramo (c), $f$ adopta la forma $f(x,\sqrt{3}\,x)=(3+4\sqrt{3})\,x$, con $0<x<\frac{1}{2}$, que tampoco presenta extremos locales. Falta ver si $f$ tiene extremos locales en el arco de circunferencia (b), para lo cual usamos el método de Lagrange.*
*Según vimos en el ejemplo anterior la función $f$ tiene extremos locales sujetos al vínculo dado por la circunferncia, en $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ y $(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$. Como este último punto no está en $\overline{\mathcal{D}}$, nos queda solamente $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ como un candidato a ser extremo de $f$ en este problema.*
*Finalmente incluimos también como candidatos a ser extremos de $f$ a los puntos inicial y final de cada tramo de la curva frontera de $\overline{\mathcal{D}}$.*
*Por lo tanto, debemos debemos comparar los valores que tome $f$ en: $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$, $(0,0)$, $(1,0)$ y $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$. Los valores de $f$ en estos puntos son $f(\frac{3}{5},\frac{4}{5})=5$, $f(0,0)=0$, $f(1,0)=3$, $f(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\simeq 4{,}96$. Por lo tanto, $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ es el máximo absoluto de $f$ en $\overline{\mathcal{D}}$ y $(0,0)$ es el mínimo absoluto de $f$ en $\overline{\mathcal{D}}$.*

## EJERCICIOS:

1. Determine analíticamente todos los extremos absolutos de la función $f(x,y)=x^2-2xy+2y$ en la región rectangular $\mathcal{D}=\{(x,y):0\leq x\leq 3\wedge 0\leq y\leq 2\}$
2. Considere la función del Ejemplo 4: $f(x,y)=x^2-y^2$, que no posee extremos en $\mathbb{R}^2$. ¿Ocurre lo mismo si el dominio se restringe a una región cerrada y acotada del plano, digamos a un círculo centrado en el origen? Presente argumentos gráficos. Luego formalice analíticamente planteando las ecuaciones a resolver y comente cuál es la respuesta que espera obtener.

## ACTIVIDADES INTEGRADORAS:

1. Analice cuál de las dos afirmaciones siguientes es una *condición necesaria* y cuál es una *condición suficiente* para la existencia de un extremo relativo:
   - Sea $f:\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función de dos variables. Sea $(x_0,y_0)\in\mathcal{D}$ un máximo o mínimo local de $f$. Luego: a) si existen las derivadas parciales primeras de $f$ en dicho punto, entonces $\vec{\nabla}f(x_0,y_0)=\vec{0}$; ó b) al menos una de las derivadas parciales de $f$ en $(x_0,y_0)$ no existe.
   - Sea $f:\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función de dos variables de clase $\mathcal{C}^2$ en un disco centrado en $(x_c,y_c)$, siendo $(x_c,y_c)$ un punto crítico de $f$ dentro de $\mathcal{D}$, tal que $\vec{\nabla}f(x_c,y_c)=\vec{0}$. Sea $D_{(x_c,y_c)}=Hf(x_c,y_c)$ el valor del Hessiano de $f$ en el punto crítico. Luego: si $D_{(x_c,y_c)}>0$, entonces $(x_c,y_c)$ es un extremo local de $f$.
2. Discutan en pequeños grupos los siguientes ejercicios:
   *a*) Stewart, *Cálculo: Trascendentes Tempranas*, pag. 947: Sección 14.7 – Ejercicios 3 y 4
   *b*) Stewart, *Cálculo: Trascendentes Tempranas*, pag. 956: Sección 14.8 – Ejercicio 1

3. Utilizando computadora, analice la gráfica y algunas curvas de nivel para estimar los valores máximos y mínimos locales y los puntos silla de la función $f(x, y) = x^3 - 3xy^4 - 2y^2$. Luego utilice los métodos analíticos vistos para hallar estos valores en forma precisa.

4. Encuentre el valor de la función $f(x, y) = (x^2 + y)\, e^{y/2}$ en todos sus puntos de ensilladura y sus extremos locales.

5. Determine los puntos de la región triangular con vértices en $(0, 0)$, $(0, 6)$ y $(6, 0)$, para los cuales $h(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$ toma sus valores máximo y mínimo absolutos.

6. Utilizando computadora, grafique la circunferencia $C : x^2 + y^2 = 1$ junto con varias curvas de la forma $C_k : y = k - x^2$ para distintos valores de $k \in \mathbb{R}$. Señale las curvas $C_k$ que cortan en algún punto a la circunferencia. Distinga las $C_k$ que tocan tangencialmente a $C$ y estime a partir del gráfico los valores de $k$ correspondientes, así como los puntos de contacto.
   Por último, resuelva analíticamente el problema de hallar los extremos de $f(x, y) = x^2 + y$ sujetos a la restricción $x^2 + y^2 = 1$. Compare con la resolución gráfica.

7. Utilice el método de multiplicadores de Lagrange para hallar los valores máximos y mínimos de $f$ sujetos a la restricción dada:

   *a*) $f(x, y) = x^2y$ para $x^2 + y^2 = 1$
   *b*) $f(x, y, z) = x + y + z$ para $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

8. Un paquete en forma de caja rectangular se puede enviar por correo, si la suma de su longitud y el perímetro de una sección transversal perpendicular a la longitud es de 84 cm a lo sumo. Encuentre las dimensiones del paquete con máximo volumen que se pueda enviar por correo.

9. Mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, halle los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, sujetos a las restricciones $x + y + z = 1$, $x - y + 2z = 2$.