INVESTIGACIÓN OPERATIVA I (2017)

PRÁCTICA 1

1. Modelizar los siguientes problemas:

   a) Una empresa de pinturas produce tres tipos de pintura adicionando a una pintura base cuatro productos o aditivos químicos, Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4. Se tiene abundante pintura base disponible cuyo costa ya fue cubierto. Las únicas restricciones se deben a la disponibilidad de los aditivos químicos requeridos. Las ganancias obtenidas por las toneladas de pintura producida aparecen en la siguiente tabla.

	Kg. de aditivo requerido por tonelada de			
Aditivo	pintura interior	pintura exterior	pintura especial	Disponible
Q_1	1	2	2	2 kg
Q_2	2	1	1	1 kg
Q_3	1	5	1	3 kg
Q_4	0	0	1	0,8 kg
Gan. por ton.	15000	25000	19000	

   Formular el problema para determinar la cantidad de toneladas de cada tipo de pintura que debe producir la empresa para maximizar la ganancia total.

   b) Un agricultor manufactura alimentos para vacas, ovejas y pollos. Lo hace mezclando los siguientes ingredientes: maíz, piedra caliza, semillas de soja y harina de pescado. Estos ingredientes contienen los siguientes nutrientes: vitaminas, proteínas, calcio y grasas. Los contenidos de los nutrientes en cada kilogramo se indican en la tabla siguiente:

Nut. / Ing.	Vitaminas	Proteínas	Calcio	Grasas
Maíz	8	10	6	8
Piedra caliza	6	5	10	6
Semillas de soja	10	12	6	6
Harina de pescado	4	8	6	9

   El agricultor tiene un contrato para producir 10, 6 y 8 toneladas de alimentos para vacas, ovejas y pollos respectivamente. Por un problema de espacio tiene la siguiente cantidad de ingredientes disponibles : 6 toneladas de maíz, 4 toneladas de semillas de soja , 10 toneladas de piedra caliza y 5 toneladas de harina de pescado. Los precios por kg. de estos ingredientes son respectivamente \$2, \$2, \$1.20 y \$1.20. Las unidades mínimas y máximas de los nutrientes aconsejables están resumidas en la siguiente tabla para cada kg. de alimento.

Nut. / Prod.	Vitaminas		Proteínas		Calcio		Grasas	
Alimento para vacas	6	∞	6	∞	7	∞	4	8
Alimento para ovejas	6	∞	6	∞	6	∞	4	6
Alimento para pollos	4	6	6	∞	6	∞	4	6

Formular el problema de encontrar la mezcla óptima de manera tal que el costo total de ella sea mínima.

c) Un colegio tiene un pequeño Departamento que ofrece 5 cursos de capacitación. Existen 5 profesores que pueden dictar cualquiera de los 5 cursos. El director del Departamento ha evaluado las condiciones de cada profesor para dictar cada uno de los cursos y le ha asignado un puntaje. El director debe asignar un profesor a cada curso.

Prof. \ Curso	1	2	3	4	5
1	7	5	4	4	5
2	7	9	7	9	4
3	4	6	5	8	5
4	5	4	5	7	4
5	4	5	5	8	9

Formular el problema de asignación para maximizar el buen desempeño de todos los cursos.

d) Una oficina postal requiere un cierto número mínimo de empleados de tiempo completo dependiendo del día de la semana. La siguiente tabla muestra los requisitos. La unión de trabajadores establece que un trabajador de tiempo completo debe trabajar 5 días consecutivos y descansar los siguientes 2.

Día	Empleados requeridos
Día 1	17
Día 2	13
Día 3	15
Día 4	14
Día 5	16
Día 6	16
Día 7	11

Formular el problema de determinar el número de empleados de tiempo completo mínimo que debe tener la oficina postal.

e) Una empresa dispone de 2 centros de producción que fabrican un determinado producto. Este producto debe ser transportado a 3 centros de demanda (mercados). Transportar la mercancía de una fábrica a un mercado tiene un precio de \$90 por unidad transportada y 100 km recorridos. En la siguiente tabla se suministran las distancias d_{ij} entre los centros de producción y los mercados (en cientos de km), la cantidad máxima producida en cada centro y la cantidad demandada en cada mercado.

Distancia	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3	Oferta
Productora 1	2,5	1,7	1,8	350
Productora 2	2,5	1,8	1,4	600
Demanda	325	300	275	

Formular el problema para determinar cómo se debe transportar la mercancía de forma tal que se minimice el costo total del envío.

2. Considerar el problema

$$\begin{aligned} & max\ 2x_1 + 5x_2 \\ & s.a \quad x_1 + x_2 \leq 16 \\ & \qquad 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   a) Representar la región factible en el plano coordenado x_1x_2.
   b) Identificar las regiones en el plano x_1x_2 donde las variables de holgura son iguales a cero.
   c) Analizar la factibilidad del problema.
   d) Encontrar gráficamente la solución óptima.

3. Considerar el problema

$$\begin{aligned} & max\ 2x_1 + 3x_2 \\ & s.a \quad x_1 + x_2 \leq 2 \\ & \qquad 4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   a) Representar la región factible en el plano coordenado x_1x_2.
   b) Hallar dos puntos extremos óptimos.
   c) Hallar una clase infinita de soluciones óptimas.

4. Considerar el problema

$$\begin{aligned} & max\ 3x_1 + x_2 \\ & s.a \ -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & \qquad x_2 \leq 4 \\ & \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   a) Representar la región factible en el plano coordenado x_1x_2.
   b) Verificar que el problema tiene solución no acotada.

5. Considerar el problema

$$\begin{aligned} & min\ \ c^t x \\ & s.a\ \ Ax \geq b \\ & \qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

   Supongamos que la componente b_i del vector b es aumentada en una unidad.

   a) ¿Qué le sucede a la región factible?
   b) ¿Qué le sucede a al valor óptimo de la función objetivo?
   c) Ejemplificar.

6. A partir del resultado del ejercicio anterior, considerando $z = c^t x$ y suponiendo que $\frac{\partial z}{\partial b_i}$ existe, ésta será mayor o igual a cero, menor o igual a cero o cero?

7. Resolver los ejercicios 5 y 6 cuando $Ax \geq b$ es reemplazada $Ax \leq b$.

8. Considerar el problema

$$\begin{aligned} min \;\; & c^t x \\ s.a \;\; & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Supongamos que una nueva restricción es agregada al problema.

a) ¿Qué sucede con la región factible?
b) ¿Qué sucede con el valor óptimo de la función objetivo?
c) Ejemplificar.

9. Considerar el problema

$$\begin{aligned} min \;\; & c^t x \\ s.a \;\; & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Supongamos que una nueva variable es agregada al problema.

a) ¿Qué sucede con la región factible?
b) ¿Qué sucede con el valor óptimo de la función objetivo?
c) Ejemplificar.

10. Considerar el problema

$$\begin{aligned} min \;\; & c^t x \\ s.a \;\; & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Supongamos que una restricción es eliminada del problema.

a) ¿Qué sucede con la región factible?
b) ¿Qué sucede con el valor óptimo de la función objetivo?
c) Ejemplificar.