**INVESTIGACIÓN OPERATIVA I (2017)**

PRÁCTICA 2

1. Mostrar que el hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n : p^t x = k\}$ y el semiespacio $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : p^t x \geq k\}$ son conjuntos convexos, donde $k$ una constante real fija y $p$ un vector fijo de $\mathbb{R}^n$.

2. Dados $b \in \mathbb{R}^m$ y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, demostrar que $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ es un conjunto convexo.

3. Mostrar que el conjunto de todas las soluciones factibles del problema de programación lineal

$$\begin{aligned} &min\ c^t x \\ &s.a\ \ Ax = b \\ &\qquad\ \ x \geq 0 \end{aligned}$$

es un conjunto convexo.

4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Decimos que $f$ es convexa si $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$ para todo $\alpha \in [0,1]$ y para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Decimos que $f$ es cóncava si $f(\alpha x+(1-\alpha)y) \geq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$ para todo $\alpha \in [0,1]$ y para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

   Probar que la función $f$ es cóncava si y sólo si $-f$ es convexa.

5. Pasar a la forma estándar el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} min & x_1 - 5x_2 - 7x_3 \\ s.a & 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq 5 \\ & 3x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 3 \\ & 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 9 \\ & \qquad\qquad\quad x_1 \geq -2 \\ & \qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

6. Hallar los puntos extremos de la región definida por las siguientes desigualdades

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 6 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

7. Sea $x$ un elemento de un conjunto convexo $S$. Supongamos que $x_1 = x + \lambda_1 p \in S$ y que $x_2 = x - \lambda_2 p \in S$, donde $p \neq 0$ y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Determinar el valor de $\alpha \in (0,1)$ tal que $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$.

8. Sea $x$ una combinación convexa de $y_1, \ldots, y_k$. Supongamos que cada $y_i$ es una combinación convexa de $y_{i,1}\ , \ldots,\ y_{i,k_i}$. Probar que $x$ es una combinación convexa de los vectores $y_{i,j}$.

9. 
   a) Considerar el conjunto $\{x : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$. Mostrar que $d$ es un rayo del conjunto si y sólo si $d \neq 0,\ \ Ad \leq 0$ y $d \geq 0$.
   b) Obtener resultados análogos para los conjuntos $\{x : Ax = b,\ x \geq 0\}$ y $\{x : Ax \geq b,\ x \geq 0\}$.

10. Mostrar que un conjunto poliedral $X$ es acotado si y sólo si no tiene rayos.

11. Sea $\{d_1, \ldots, d_k\}$ un conjunto de direcciones del conjunto definido por las restricciones $Ax = b$, $x \geq 0$. Probar que $d = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i d_i$, siendo cada $\alpha_i \geq 0$, es también una dirección de este conjunto.

12. Sea $X = \{x : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ y sea $x_0$ tal que $Ax_0 < b,\ x_0 > 0$. Probar que $x_0$ no es punto extremo de $X$.

13. Considerar el problema

$$\begin{aligned} min\ \ & c^t x \\ s.a.\ \ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde $c$ es un vector no nulo. Si el punto $x_0$ es tal que $Ax_0 > b$ y $x_0 > 0$, mostrar que $x_0$ no puede ser una solución óptima.

14. Considerar el poliedro definido por las siguientes restricciones

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ x_1 - x_2 & \leq & 4 \\ x_2 & \leq & 2 \\ x_1,\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

   a) Dibujar la región.
   b) Identificar los puntos extremos y en cada uno de ellos identificar las variables básicas y las variables no básicas.
   c) Suponga que cambia del punto extremo $(4, 0)$ al punto $(\frac{14}{3}, \frac{2}{3})$. Especificar qué variable entra a la base y cuál la deja.