INVESTIGACIÓN OPERATIVA I (2017)

PRÁCTICA 3

1. Dado el problema

$$\begin{aligned} max \quad & 5x_1 + 4x_2 \qquad (= -\ min\ \ -5x_1 - 4x_2) \\ s.a \quad & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   a) Graficar y resolver el problema geométricamente.

   b) Resolver el problema por el método simplex, indicando el punto (o los puntos) donde se alcanza el máximo y cuál es el valor máximo que toma la función objetivo.

   c) Marcar en el gráfico los iterados encontrados e indicar el orden en que se recorren de los vértices.

2. Dado el siguiente problema

$$\begin{aligned} min \ & -2x_1 - 4x_2 \\ s.a \ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 + x_2 \leq \tfrac{3}{2} \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   a) Graficar y resolver el problema geométricamente.

   b) Resolver el problema por el método simplex.

3. *a*) ¿Cuánto vale $z_j - c_j$ si j es el subíndice correspondiente a una variable básica?

   b) Suponga que en una iteración del método simplex la solución básica factible es no degenerada y una variable no básica puede entrar a la base. Probar que si en el cálculo para decidir que variable deja la base (test del mínimo radio o test del cociente) ocurre para un único subíndice entonces la nueva solución es no degenerada.

   c) ¿Qué ocurre si el test del mínimo radio se cumple para dos o más subíndices?

   d) Si en una iteración del método simplex la variable x_j deja la base, podrá entrar en la próxima iteración? Justificar lo que afirme.

4. Dado el problema

$$\begin{aligned} max \quad & 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \\ s.a \quad & 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 \leq 8 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 10 \\ & x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 \leq 3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Resolver el problema poniéndolo en un tablero de simplex y verificar que es no acotado. Haga uso del tablero final para construir una dirección d tal que $c^t d > 0$ y construya una solución factible para la cual z sea al menos 3000.

5. Los siguientes tableros corresponden a una iteración de un problema PL resuelto por el método Simplex

I)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
3	0	0	5	0	-1	0	20
2	1	0	2	0	2	0	2
1	0	1	-1	0	0	0	3
0	0	0	0	1	-1	0	4
3	0	0	2	0	2	1	6

a) ¿Cuáles son las variables básicas?

b) ¿Es posible mejorar el valor de la función objetivo para el problema de $min\ c^t x$? ¿Cómo?

c) Idem b) para el problema $max\ c^t x$.

II)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
3	0	0	1	0	0	0	10
2	0	1	-2	0	0	0	4
1	1	0	0	0	0	0	5
0	0	0	-1	1	0	0	2
3	0	0	0	0	1	0	9
2	0	0	-3	0	0	1	6

a) ¿Qué tipo de soluciones tiene el problema de $min\ c^t x$? Justificar su respuesta.

b) Hallar la dirección extrema.

c) ¿Es posible hallar una solución óptima con $z = -3000$? ¿Cuál?

d) ¿Qué tipo de solución tiene el problema $max\ c^t x$?

III)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	0	0	0	-3	0	-2	20
1	0	2	0	1	0	-2	10
0	1	1	0	2	0	1	15
0	0	0	1	3	0	2	20
0	0	0	0	4	1	5	30

a) ¿Qué tipo de soluciones tiene el problema de $min\ c^t x$? Justificar su respuesta.

b) ¿Es posible hallar una solución óptima con $x_3 = 2$? ¿Con $x_3 = 6$?

c) ¿Es posible hallar una solución óptima con $x_4 = 10$? Justificar su respuesta.

IV)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	0	0	2	30
1	0	0	0	3	10
0	1	0	0	2	20
0	0	1	0	1	15
0	0	0	1	-2	8

a) ¿Qué puede decir del problema de $min\ c^t x$ si x_4 es variable de holgura?

b) ¿Qué puede decir del problema de $max\ c^t x$ si x_4 es variable de holgura?

V)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	0	0	0	0	-3	30
1	0	0	0	-2	2	4
0	1	0	0	-3	1	5
0	0	1	0	0	2	6
0	0	0	1	-5	3	8

a) ¿Qué tipo de soluciones tiene el problema de $min\ c^t x$?

b) ¿Es posible hallar una solución óptima con $x_5 = 5$? ¿Cuál? ¿Cuánto vale z?

c) Idem *b*) con $x_5 = k$ arbitrariamente grande.

6. Dado el problema

$$\begin{aligned} min \quad & -x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ s.a \quad & 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 10 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Si en una iteración del tablero simplex se tiene la siguiente tabla:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	-1	0		0	-2	0	
x_4	2	0		1	-2	0	
x_2	2	1		0	$\frac{1}{2}$	0	
x_6	1	0		0	-1	1	

a) Comprobar que hay un error de cálculo en la columna y_1.

b) Comprobar que en la columna y_5 no hay un errores de cálculo.

c) Utilizando la información de la tabla calcular x_B, y_3 y $z_3 - c_3$.

7. El siguiente problema describe la asignación de recursos a tres firmas, para la producción anual de plantas manufactureras. Las cantidades a producir se denotan por x_1, x_2 y x_3. La función objetivo indica la contribución a la ganancia con la venta de esos productos.

$$
\begin{aligned}
max \quad & 10x_1 + 15x_2 + 5x_3 \\
s.a \quad & 2x_1 + x_2 \leq 6000 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 9000 \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 4000 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

a) Verificar (sin realizar iteraciones) que la base optimal consiste de la variable de holgura de la primer restricción junto con x_1 y x_2.

b) Usar *a*) para construir el tablero optimal.

c) El departamento de Investigación y Desarrollo propone un nuevo producto cuyos coeficientes están representados por $(2, 4, 1)^t$ y la contribución a la ganancia del mismo, es de 12 dólares. ¿Conviene producirlo? En caso afirmativo, ¿cuál es la nueva ganancia óptima?

d) ¿Cuál es la mínima contribución a la ganancia que debería esperarse para que este nuevo producto incremente el valor de la función objetivo?

8. Considerar el problema

$$
\begin{aligned}
min \quad & -x_1 - 2x_2 + x_3 \\
s.a \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\
& 2x_2 - x_3 \leq 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

a) Hallar la solución optimal. En cada iteración identificar B, N, B^{-1}, $B^{-1}N$, $c_B^t B^{-1}$ y $z_j - c_j$.

b) En la optimalidad, hallar $\dfrac{dx_1}{dx_3}$, $\dfrac{dx_2}{dx_4}$, $\dfrac{dz}{dx_5}$ y $\dfrac{dx_B}{dx_N}$, donde x_4 y x_5 son variables de holgura. Interpretar los resultados obtenidos.

c) Suponga que c_1 cambia de -1 a $-1 + \Delta 1$ y que c_2 cambia de -2 a $-2 + \Delta 2$. Hallar la región en el espacio $(\Delta 1, \Delta 2)$ que mantiene la optimalidad obtenida en *a*).

d) Suponga que se considera una nueva actividad x_6 con $c_6 = -3$, $a_{16} = 3$ y $a_{26} = 3$. ¿Es conveniente considerarla? En caso afirmativo, hallar la nueva solución óptima.

e) Suponga que b_1 cambia de 6 a $6 + \Delta$. Hallar el rango de Δ que mantiene la optimalidad de la base hallada en *a*).

f) Usar el tablero final para representar la columna a_3 como una combinación lineal de a_1 y a_2.