INVESTIGACIÓN OPERATIVA I (2017)

PRÁCTICA 5

1. Mostrar que si x^* es un punto factible del problema primal

$$\begin{aligned} min \;\; & c^t x \\ s.a \;\; & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

   y^* es un punto factible del problema dual

$$\begin{aligned} max \;\; & b^t y \\ s.a \;\; & A^t y \leq c \end{aligned}$$

   y $(x^*)^t(c - A^t y^*) = 0$ entonces x^* es un óptimo del problema primal e y^* es un óptimo del problema dual.

2. Plantear el problema dual de

$$\begin{aligned} min \;\; & c^t x \\ s.a \;\; & Ax = b \\ & x \geq a \end{aligned}$$

   donde $a \geq 0$.

3. Considerar el problema:

$$\begin{aligned} max \;\; & -x_1 + 2x_2 \\ s.a \;\; & 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ & x_1,\; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   a) Resolverlo geométricamente.

   b) Plantear el problema dual y resolverlo geométricamente. Utilizar los teoremas de dualidad para obtener los valores de todas las variables primales correspondientes a la solución dual optimal.

4. Considerar el problema:

$$\begin{array}{rl} max & x_1 + x_2 \\ s.a & x_1 - x_2 \leq -1 \\ & -x_1 + x_2 \leq -1 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Plantear el problema dual y verificar que ambos son inconsistentes.

5. Dados los siguientes problemas:

I)
$$\begin{array}{rl} min & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ s.a & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ & -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 \leq -3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 \end{array}$$

II)
$$\begin{array}{rl} min & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \\ s.a & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 2 \\ & -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq -3 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

   a) Resolver geométricamente el problema dual.
   b) Utilizar los teoremas de dualidad y la información del problema dual para resolver el problema primal.

6. Considerar el problema:

$$\begin{array}{rl} max & 2x_1 + x_2 \\ s.a & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

   a) El punto $(4, 0)$ es la solución óptima del problema. Verificar esta afirmación usando las condiciones de optimalidad e interpretar geométricamente.
   b) Verificar que en el punto $(1, 3)$ no se verifican las condiciones de optimalidad e interpretar geométricamnete.

7. Considerar el problema:

$$\begin{array}{rl} max & 2x_1 + 3x_2 \\ s.a & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

   a) Resolverlo geométricamente.

b) Escribir las condiciones de optimalidad y verificar que ellas se cumplen en la optimalidad.

8. Considerar el siguiente modelo lineal y la tabla óptima. Este modelo ha sido resuelto con el algoritmo simplex primal.

$$\begin{aligned} max\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ s.a\ 15x_1 + 25x_2 + 30x_3 \leq 90 \\ 15x_1 + 5x_2 + 15x_3 \leq 60 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	17/4	3/20	1/4	57/2
x_2	0	1	3/4	1/20	-1/20	3/2
x_1	1	0	3/4	-1/60	1/12	7/2

a) Obtener de la tabla la solución óptima del modelo.

b) Dar el modelo dual y obtener de la tabla la solución óptima del modelo dual.