TEORÍA DE GALOIS

GASTÓN ANDRÉS GARCÍA

CURSO DE POSGRADO/OPTATIVA

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2015

Programa

Descripción breve del contenido y del enfoque del curso. Este curso tiene por objetivo presentar la teoría básica de cuerpos que resulta crucial para la comprensión de diversas áreas de la matemática como la teoría algebraica de números, la teoría de anillos, la teoría de códigos y la geometria algebraica.

Para este curso es recomendable tener conocimiento de álgebra lineal y de la teoría de grupos, módulos y anillos que regularmente se dicta en la materia Estructuras Algebraicas.

1. Cuerpos, extensiones y polinomios

Anillos, cuerpos. Cuerpos de fracciones. Característica, cuerpos primos. Álgebra, extensiones de cuerpos. Adjunción (Algebraica y racional). Álgebra universal de un semigrupo. Álgebra de polinomios, especialización, dependencia algebraica, prolongamiento de morfismos. Álgebra de fracciones racionales, especialización, prolongamiento de morfismo. Factorización de polinomios. Ejemplos: ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grado. Polinomios primitivos, lema de Gauss. Levantamiento de factorizaciones, factorialidad en los anillos de polinomios. Criterio de irreducibilidad de Eisenstein, aplicaciones.

Extensiones de tipo finito, extensiones simples. Extensiones de grado finito. Clase distinguida de extensiones. Condiciones de clase distinguida para extensiones de grado finito. Elementos algebraicos, polinomios minimal. Elementos transcedentes. Extensiones algebraicas, relación con las extensiones de grado finito, condiciones de clase distinguida. Extensiones trascendentes, extensiones puramente trascendentes. Cuerpos algebraicamente cerrados. Introducción de una raíz para un polinomio no constante. Factorización lineal y cantidad de raíces de polinomios no constantes. Cerradura algebraica. Cuerpos algebraicamente cerrados, condiciones equivalentes. Clausuras algebraicas, prefinalidad, unidad (salvo isomorfismos). Teorema de prolongamiento de isomorfismos, consecuencias. Existencias de clausuras algebraicas. Cuerpos de descomposición de un conjunto de polinomios no constantes. Existencia y unicidad (salvo isomorfismos), caso de conjuntos finitos. Acciones compatibles de grupos en conjuntos y representaciones de grupos, conjugación, órbitas. Elementos conjugados y polinomios irreducibles. Endomorfismos de extensiones algebraicas. Cuerpos conjugados.

Extensiones normales, condiciones equivalentes. Extensión de escalares en extensiones normales. Ínfimo y supremo de familias de extensiones normales. Extensiones de grado finito. Independencia lineal y cantidad de morfismos. Teorema de Dedekind, consecuencia sobre la cantidad de morfismos. Transitividad de la cantidad de morfismos, consecuencias.

Extensiones separables. Elementos (algebraicos) separables. Extensiones (algebraicas) separables, condiciones de clase distinguida. Extensiones separables de grado finito y cantidades de morfismos. Polinomios separables. Teoremas del elemento primitivo. Criterio de separabilidad de Jacobson.

Extensiones galoisianas, condiciones equivalentes. Consecuencias de su identidad con las extensiones normales y separables: polinomios minimales, extensión de escalares en extensiones galoisianas de grado finito.

2. Teoría de Galois

Subextensiones normales de extensiones galoisianas. Grupos finitos de automorfismos, teorema de Artin. Teorema fundamental de Galois, consecuencias. Elementos radicales. Extensiones radicales, condiciones de clase distinguida. Extensiones radicales de grado finito. Cerradura radical. Grupos resolubles, criterio de resolubilidad por radicales. Construcciones con regla y compás. Cuerpo de invariantes de extensiones normales, estructura de extensiones normales.

Estructura de extensiones algebraicas. Extensiones (algebraicas) puramente inseparables, su identidad con las extensiones radiciales. Cerradura separable (en una extensión algebraica). Estructura de extensiones algebraicas. Grados de separabilidad e inseparabilidad, su relación con la cantidad de morfismos y transitividad. Multiplicidad de las raíces de un polinomio irreducible. Cuerpos perfectos, condiciones equivalentes. Subcuerpo perfecto generado por un cuerpo en la clausura algebraica. Norma y traza de extensiones de grado finito, propiedades algebraicas, transitividad, relación con los coeficientes de polinomio minimal. Separabilidad y traza, discriminantes de la forma traza en extensiones separables.

Extensiones abelianas y extensiones cíclicas. Propiedades generales de las extensiones abelianas y de las extensiones cíclicas, como extensiones galoisianas. Bases normales de extensiones cíclicas. Teorema 90 de Hilbert, caso cíclico. Extensiones cuadráticas.

Cuerpos finitos. Estructura de los cuerpos finitos y de sus grupos de automorfismo. Clasificación de los cuerpos finitos. Extensiones de grado finito de cuerpos finitos, generadores canónicos de los grupos de Galois, suryectividad de la norma y de la traza.

Raices de la unidad. Estructura y propiedades de los grupos de raíces n-ésimas de la unidad de un cuerpo, raíces n-ésimas primitivas. Estructura del grupo de raíces de la unidad de un cuerpo algebraicamente cerrado.

Cuerpos ciclotómicos. Propiedades generales de los cuerpos ciclotímicos. Estructura del grupo de unidades del anillo de enteros módulo n. Polinomios ciclotímicos, criterio de irreductibilidad, irreductibilidad sobre el cuerpo racional. Extensiones cíclicas y ecuaciaones. Extensiores cíclicas de grado finito y ecuaciaones binómicas. Extensiones abelianas de grado p, en características p, y ecuaciones de Artin-Schreier.

Referencias

[A] E. Artin, *Galois Theory*, Notre Dame, Souti Bend, 1955.

[B] N. Bourbaki, *Algebre, Chapitre IV (Polynomes et fractions rationnelles)-Chapitre V (Courps conmutatifs)*, Hermann, París, 1959.

[G] E.R. Gentile, *Teoría de cuerpos*, Notas de Matemática, IMAF (Universidad de Córdoba). Córdoba, 1969.

[H] T. W. Hungerford, *Algebra*, Reprint of the 1974 original. Graduate Texts in Mathematics, 73. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980. xxiii+502 pp.

[J] N. Jacobson, *Lectures in abstract algebra, Volumen III (Theory of Fieds and Galois Theory)*, Van Nostrand Princeton, 1964.

[L] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, Reading, 1965.

[MS] M. Mombelli y S. Simondi, *Teoría de Galois*, XV ELAM, Escuela Latinoamericana de Matemática, Álgebra no conmutativa y Teoría de Lie, Córdoba (2011).

[R] M. J. Redondo, *Teoría de Galois*, II Encuentro Nacional de Álgebra (2004).