

GRUPOS Y ÁLGEBRAS DE LIE

GASTÓN ANDRÉS GARCÍA

CURSO DE POSGRADO/OPTATIVA

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2017

PROGRAMA

1. GRUPOS DE LIE

1.1. Grupos topológicos y grupos de Lie. Definiciones y ejemplos. Grupos de Lie clásicos. Espacio tangente. Álgebras de Lie de un grupo de Lie. Subgrupos de Lie y subálgebras. Cubrimientos. Grupos de Lie simplemente conexos. Homomorfismos y homomorfismos continuos. El Teorema fundamental de Lie. Función exponencial. Grupos de Lie abelianos. Subgrupos de Lie cerrados y variedades diferenciables homogéneas. La representación adjunta.

1.2. Representaciones de grupos de Lie. Definición, ejemplos. Lema de Schur, relaciones de ortogonalidad. Teorema de Peter-Weyl. Álgebras de Lie compactas.

1.3. Medida de Haar para grupos de Lie. Formas diferenciales. Formas invariantes. Medida de Haar para grupos de Lie. Función modular.

2. ÁLGEBRAS DE LIE

2.1. Álgebras de Lie. Álgebras de Lie lineales, álgebras de Lie clásicas. Ideales. Cocientes. Derivaciones. Representación adjunta. Producto semidirecto. Álgebras de Lie solubles y el Teorema de Lie. Álgebras de Lie nilpotentes. Teorema de Engel. Forma de Killing. Criterios de Cartan. Álgebras de Lie semisimples. Ejemplos. Descomposición de Levi. Álgebras de Lie compactas. Álgebras de Lie reductivas.

2.2. Álgebras de Lie semisimples y sistemas de raíces. Descomposición de un álgebra de Lie a partir de una subálgebra de Cartan. Descomposición en espacios raíces. El ejemplo $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Subálgebras de Cartan abstractas. Espacios de pesos generalizados. Subálgebras de Cartan y elementos regulares. Sistemas de raíces. El elemento Casimir. Lema de Whitehead y Teorema de Weyl. Propiedades del sistema de raíces de un álgebra de Lie semisimple.

Reflexiones en el espacio euclídeo. Raíces simples. Matriz de Cartan. Diagramas de Dynkin. Clasificación de las matrices de Cartan y los diagramas de Dynkin. Teoremas de isomorfismo. Teorema de reconstrucción de Serre. Existencia de la forma real compacta.

3. COMPLEMENTOS

3.1. Representaciones de álgebras de Lie semisimples. Representaciones de peso máximo. Representaciones de dimensión finita. El álgebra envolvente universal. Módulos de peso. Módulos de Verma.

REFERENCIAS

- [A] N. ANDRUSKIEWITSCH, *Álgebras de Lie semisimples y representaciones de dimensión finita*, Trabajos de Matemática, Serie B, **30** (1995), FaMAF, UNC.
- [B] N. BOURBAKI, *Lie groups and Lie algebras*. Chapters 1–9. Elements of Mathematics (Berlin).
- [FH] W. FULTON y J. HARRIS, *Representation theory*, Springer-Verlag, New York 1991.
- [FJ] M. FARINATI y P. JANCSA, *Grupos y álgebras de Lie*, Trabajos de Matemática, Serie B, **56** (2010), FaMAF, UNC. <http://www2.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serieb/BMat56.pdf>.
- [H] J. HUMPHREYS, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Second printing, revised. Graduate Texts in Mathematics, 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.
- [K] A. W. KNAPP, *Lie groups beyond an introduction*. Second edition. Progress in Mathematics, 140. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002. xviii+812 pp.
- [P] C. PROCESI, *Lie groups. An approach through invariants and representations*. Universitext. Springer, New York, 2007. xxiv+596
- [W] F. W. WARNER, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott Foresman, Glenview, III, 1971. Second ed. Springer-Verlag. New York 1982.